BAC

سلسلة هباج

مطابق للبرنامج الجديد

الرياضيات

دروس وتمارين محلولة بالتفصيل

- حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
- حلول مفصلة لتمارين نموذجية
- حلول مفصلة لنماذج البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي

علوم تجريبية * رياضيات * تقني رياضي

أكثر من 500 تمرين محلول بالتفصيل

الجزء 1

3e Année Secondaire : Mathématiques

سلسلة هبــاج

الرياضيــات

Mathématiques

حلول لجميع تمارين الكتاب المدرسي
و نمــاذج للبكالوريا

الجزء الأول

السنة 3 ثانوي

تقني رياضي ــ رياضيات ــ علوم تجريبية

يسرني أن أتقدم بهذه السلسلة لطلبتنا الأعزاء في المرحلة الثانوية لكــل الشعب العلمية منها و التكنولوجية .

ـ محتــوى هذه السلسلة ينطبق على البرنامج الرسمي الجديد المقرر من طرف وزارة التربية الوطنية .

ـ يشمل هذا الجزء من السلسلة على خمسة محاور من البرنامج :

- الإستدلال بالتراجع
- النهايات و الإستمرارية
- القسمة في Z
- الجداء السلمي
- المستقيمات و المستويات في الفضاء

ـ يعالج الكتاب الدروس النظرية معالجة تامة و قد حرصت على أن أضع لكل فكرة مثال توضيحي مفصل للتمكن من فهمها بشكل جيد .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايــة كل درس ، مجموعة تطبيقــات للتصحيح الذاتــي محلولة بالتفصيل التي تعطي نظرة شاملة للدرس .

ـ كما حرصت أن أعالج في نهايــة كل محور ، مجموعة نماذج بكالوريا محلولة بالتفصيل التي تساعد للتحضير لإمتحان البكالوريا و مختلف المسابقات .

آملا بهذا المجهود المتواضع أن أكون قد وفقت في عملي .

هبــاج جمال
لصواني وهيب

الهاتف : 81 52 26 0773

الإستدلال بالتراجع

مبدأ الإستدلال بالتراجع

لتكن $P(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n

و ليكن n_0 عدد طبيعي كيفي .

للبرهان على أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$. يكفي أن نتبع الخطوات التالية :

1 ــ نتأكد من صحة الخاصية من أجل $n = n_0$ أي $P(n_0)$

2 ــ نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر تماما من n_0 ونبرهن صحة هذه الخاصية من أجل $n + 1$ أي $P(n + 1)$

مثال ــ 1

لنثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فان العدد $4^n + 2$ مضاعف 3

الحـل ــ 1

لاحظ أن $n_0 = 0$ لأن نريد إثبات الخاصية من أجل كل عدد طبيعي والخاصية المطلوبة هي : العدد $4^n + 2$ مضاعف 3

طريقة الحل :

نستعمل الاستدلال بالتراجع كما يلي :

1 ــ لنتأكد أن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

هل العدد $4^0 + 2$ مضاعف 3 ؟

لدينا $4^0 + 2 = 1 + 2 = 3$ إذن : فعلا العدد $4^0 + 2$ مضاعف 3

و عليه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

2 ــ لنفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n > 0$

أي : العدد $4^n + 2$ مضاعف 3 (فرضية التراجع)

لنبرهن أن العدد $4^{n+1} + 2$ مضاعف 3

لدينا :
$$4^{n+1} + 2 = 4 \times 4^n + 2$$
$$= (1 + 3) \times 4^n + 2$$
$$= 4^n + 3 \times 4^n + 2$$
$$= (4^n + 2) + 3 \times 4^n$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد $4^n + 2$ مضاعف 3 أي يوجد عدد طبيعي k يحقق $4^n + 2 = 3k$

منه : $4^{n+1} + 2 = 3k + 3 \times 4^n$

أي : $4^{n+1} + 2 = 3(k + 4^n)$

نضع $k + 4^n = \ell$ حيث ℓ عدد طبيعي

إذن : $4^{n+1} + 2 = 3\ell$

منه : العدد $4^{n+1} + 2$ مضاعف 3

أي : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n العدد $4^n + 2$ مضاعف 3

مثال ــ 2

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n فان العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف 7

الحـل ــ 2

باستعمال الاستدلال بالتراجع

1 ــ هل العدد $3^{2(0)+1} + 2^{0+2}$ مضاعف 7 ؟

لدينا : $3^{2(0)+1} + 2^{0+2} = 3 + 2^2 = 7$ و 7 مضاعف 7

إذن : العدد $3^{2(0)+1} + 2^{0+2}$ مضاعف 7

2 ــ لنفرض أن العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف 7 من أجل $n > 0$

هل العدد $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ مضاعف 7 ؟

لدينا:
$$3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 3^{2n+2+1} + 2^{n+1+2}$$
$$= 3^2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$

$$= 9 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$
$$= (2+7) \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$
$$= 2 \times 3^{2n+1} + 7 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2}$$
$$= 2 \times 3^{2n+1} + 2 \times 2^{n+2} + 7 \times 3^{2n+1}$$
$$= 2(3^{2n+1} + 2^{n+2}) + 7 \times 3^{2n+1}$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف7

أي يوجد عدد طبيعي k حيث $7k = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

منه : $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 2(7k) + 7 \times 3^{2n+1}$
$$= 7(2k + 3^{2n+1})$$

نضع : $\ell = 2k + 3^{2n+1}$ حيث ℓ عدد طبيعي .

إذن : $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 7\ell$

أي : العدد $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2}$ مضاعف 7 .

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ مضاعف 7

ملاحظة : في بعض الحالات لاثبات صحة خاصية نستعمل الاستدلال بالتراجع مرتين .

تمارين الكتاب المدرسي

<u>التمرين ــ 1</u>

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$$0 + 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>الحـل ــ 1</u>

1 ــ من أجل $n = 0$ المجموع $0 + 1 + 2 + 3 + ... + n$ يساوي 0 (n ينطبق على 0)

و $0 = \frac{0(0+1)}{2}$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 0$

2 ــ لنفرض أن : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ من أجل $n > 0$

هل : $1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$ ؟

لدينا : $1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

لأن حسب فرضية التراجع $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

إذن : $1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = (n+1)(\frac{n}{2} + 1)$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

منه : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

<u>التمرين ــ 2</u>

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحـل ـــ 2

1ـــ من أجل $n = 0$ المجموع $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2$ يساوي 0 (n ينطبق على 0)

و $0 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ لأن $n = 0$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

2 ــ نفرض أن : $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ من أجل $n > 0$

هل $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$ ؟

لدينا : $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

لأن حسب فرضية التراجع : $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

منه : $0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 = (n+1)\left[\dfrac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$

$$= (n+1)\dfrac{2n^2 + n + 6n + 6}{6}$$

$$= (n+1)\dfrac{2n^2 + 7n + 6}{6}$$

$= (n+1)\dfrac{(2n+3)(n+2)}{6}$ لأن : $(2n+3)(n+2) = 2n^2 + 7n + 6$

$$= \dfrac{(n+1)(2n+2+1)(n+1+1)}{6}$$

$$= \dfrac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

التمرين ـــ 3

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحـل ـــ 3

1 ــ من أجل $n = 0$ المجموع : $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3$ يساوي 0 لأن n ينطبق على 0 .

و $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} = 0$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

2 ــ نفرض أن : $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ من أجل $n > 0$

هل : $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \dfrac{(n+1)^2 (n+1+1)^2}{4}$ ؟

لدينا : $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$

لأن حسب فرضية التراجع $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

إذن : $0^3 + 1^3 + 2^3 + ... + n^3 + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)(n+1)^2$

$$= (n+1)^2\left[\dfrac{n^2}{4} + n + 1\right]$$

$$= (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4}$$
$$= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4}$$
$$= \frac{(n+1)^2(n+1+1)^2}{4}$$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0^3+1^3+2^3+ .... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

التمرين ـ 4

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $2^{3n}-1$ مضاعف 7

الحـل ـ 4

1 ـ من أجل $n = 0$: $2^{3(0)} - 1 = 1 - 1 = 0$ و 0 مضاعف 7

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 0$

2 ـ نفرض أن العدد $2^{3n} - 1$ مضاعف 7 من أجل $n > 0$

هل $2^{3(n+1)} - 1$ مضاعف 7 ؟

لدينا : $2^{3(n+1)} - 1 = 2^{3n+3} - 1$
$$= 2^3 \times 2^{3n} - 1$$
$$= 8 \times 2^{3n} - 1$$
$$= (7+1) \times 2^{3n} - 1$$
$$= 7 \times 2^{3n} + 2^{3n} - 1$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن العدد $2^{3n} - 1$ مضاعف 7

أي يوجد عدد طبيعي k حيث $2^{3n} - 1 = 7k$

منه : $2^{3(n+1)} - 1 = 7 \times 2^{3n} + 7k$
$$= 7(2^{3n} + k)$$
$$= 7\ell \quad \text{حيث} \quad \ell = 2^{3n} + k$$

إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $2^{3n} - 1$ مضاعف 7

التمرين ـ 5

أثبت بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3^{2n} - 1$ مضاعف 8

الحـل ـ 5

1 ـ من أجل $n = 0$: $3^{2(0)} - 1 = 1 - 1 = 0$ و 0 مضاعف 8

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 0$

2 ـ نفرض أن $3^{2n} - 1$ مضاعف 8 من أجل $n > 0$

هل $3^{2(n+1)} - 1$ مضاعف 8 ؟ .

لدينا : $3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1$
$$= 3^2 \times 3^{2n} - 1$$
$$= 9 \times 3^{2n} - 1$$
$$= (8+1) \times 3^{2n} - 1$$
$$= 8 \times 3^{2n} + 3^{2n} - 1$$

لكن حسب فرضية التراجع فإن $3^{2n} - 1$ مضاعف 8

أي يوجد عدد طبيعي k حيث $3^{2n} - 1 = 8k$

منه : $3^{2(n+1)} - 1 = 8 \times 3^{2n} + 8k$
$$= 8(3^{2n} + k)$$
$$= 8\ell \quad \text{حيث} \quad \ell = 3^{2n} + k$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3^{2n} - 1$ مضاعف 8.

التمرين ـــ 6

هل الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n : $3^{2n+1} - 2^{2n+2}$ مضاعف 7 صحيحة ؟

الحـــل ـــ 6

1 ـــ من أجل $n = 0$: $3^{2(0)+1} - 2^{2(0)+2} = 3^1 - 2^2 = -1$

لكن (-1) ليس مضاعف 7

إذن : الخاصية ليست صحيحة من أجل $n = 0$

نتيجة : الخاصية $3^{2n+1} - 2^{2n+2}$ مضاعف 7 من أجل كل عدد طبيعي n ليست صحيحة .

التمرين ـــ 7

لتكن $P(n)$ الخاصية : $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 .

هل الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟.

الحـــل ـــ 7

لنحاول أن نبرهن عن صحة هذه الخاصية باستعمال الاستدلال بالتراجع كما يلي :

1 ـــ من أجل $n = 0$: $0^3 + 2(0) = 0$ و 0 يقبل القسمة على 3

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

2 ـــ نفرض أن : $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 من أجل $n > 0$

هل $(n+1)^3 + 2(n+1)$ يقبل القسمة على 3 ؟.

لدينا :

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= (n+1)[(n+1)^2 + 2]\\ &= (n+1)(n^2 + 2n + 1 + 2)\\ &= n^3 + 2n^2 + 3n + n^2 + 2n + 3\\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 2n + 3\\ &= n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

لكن : حسب فرضية التراجع فإن $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3

أي : يوجد عدد طبيعي k يحقق $n^3 + 2n = 3k$

منه :

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= 3k + 3(n^2 + n + 1)\\ &= 3(k + n^2 + n + 1)\end{aligned}$$

$= 3\ell$ حيث $\ell = k + n^2 + n + 1$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : الخاصية $n^3 + 2n$ يقبل القسمة على 3 صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

التمرين ـــ 8

1 ـــ أثبت أن إذا وجد عدد طبيعي n حيث 9 يقسم $10^n + 1$ فإن 9 يقسم $10^{n+1} + 1$

2 ـــ هل من أجل كل عدد طبيعي n : $10^n + 1$ مضاعف 9 ؟

الحـــل ـــ 8

1 ـــ ليكن $10^n + 1$ قابل للقسمة على 9

أي : يوجد عدد طبيعي k حيث $10^n + 1 = 9k$

لدينا :

$$\begin{aligned}10^{n+1} + 1 &= 10 \times 10^n + 1\\ &= (9+1) \times 10^n + 1\\ &= 9 \times 10^n + 10^n + 1\\ &= 9 \times 10^n + 9k\end{aligned}$$

لأن $10^n + 1 = 9k$

$$\begin{aligned}&= 9(10^n + k)\\ &= 9\ell\end{aligned}$$

حيث $\ell = 10^n + k$

إذن : العدد $10^{n+1} + 1$ مضاعف 9

أي 9 يقسم العدد $10^{n+1} + 1$

2 ـــ لاحظ أن : من أجل $n = 0$ فإن $10^0 + 1 = 2$ و لكن 2 ليس مضاعف 9

إذن : الخاصية ليست محققة من أجل $n = 0$

و عليه : العدد $10^n + 1$ ليس مضاعف 9 من أجل كل عدد طبيعي n .

التمرين ـــ 9

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـــ : $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

1 ـــ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 1$

2 ـ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

الحل ـ 9

1 ـ من أجل $n = 1$: $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{4} = 2$

بما أن $2 > 1$ فإن $u_1 > 1$ إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن $u_n > 1$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} > 1$ ؟

لدينا: $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

لكن : $u_n > 1$ إذن حسب خواص الحصر فإن $\sqrt{u_n} > \sqrt{1}$ أي $\sqrt{u_n} > 1$

منه : $u_{n+1} > 1$ أي الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n > 1$

2 ـ من أجل $n = 1$ لدينا $u_{n+1} = u_{1+1}$

$= u_2$

$= \sqrt{u_1}$

$= \sqrt{2}$

بما أن $\sqrt{2} \leq \frac{3}{2}$ فإن $u_2 \leq \frac{3}{2}$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ من أجل $n > 1$

هل $u_{(n+1)+1} \leq \frac{3}{2}$ ؟

لدينا : $u_{(n+1)+1} = \sqrt{u_{n+1}}$

لكن : $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$ حسب فرضية التراجع .

إذن $\sqrt{u_{n+1}} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$

أي : $u_{(n+1)+1} \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$ $\left(\text{لاحظ أن } \sqrt{\frac{3}{2}} \leq \frac{3}{2}\right)$

إذن $u_{(n+1)+1} \leq \frac{3}{2}$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

التمرين ـ 10

(u_n) متتالية معرفة على N بـ $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n فإن $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة .

الحل ـ 10

تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا تحقق أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = u_0$

إذن : لنبرهن صحة الخاصية من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n = u_0$

باستعمال الاستدلال بالتراجع كما يلي :

1 ـ من أجل $n = 1$ لدينا : $u_1 = \sqrt{6 + u_0}$

$= \sqrt{6 + 3}$

$= \sqrt{9}$

$= 3$

إذن : $u_1 = 3 = u_0$ منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$

2 ـ نفرض أن $u_n = u_0 = 3$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+1} = u_0 = 3$ ؟

لدينا : $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$

لكن حسب فرضية التراجع $u_n = u_0 = 3$

إذن : $u_{n+1} = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$

منه : $u_{n+1} = u_0 = 3$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n = u_0 = 3$

منه : المتتالية (u_n) ثابتة و كل حدودها تساوي 3

التمرين ــ 11

نضع $t_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + n(n+1)$

1ــ أحسب $t_1 ; t_2 ; t_3 ; t_4$

2ــ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

الحـل ــ 11

1ــ

$t_1 = 1 \times 2 = 2$

$t_2 = 1 \times 2 + 2 \times 3 = 8$

$t_3 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 20$

$t_4 = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 = 40$

2 ــ الإستدلال بالتراجع :

✓ من أجل $n = 1$ لدينا $\frac{1}{3} n(n+1)(n+2) = \frac{1}{3}(2)(3) = 2$ و $t_1 = 2$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

✓ نفرض أن $t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$ من أجل $n > 1$

هل $t_{n+1} = \frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$ ؟

لدينا : $t_{n+1} = 1 \times 2 + 2 \times 3 + ... + n(n+1) + (n+1)(n+2)$

$= t_n + (n+1)(n+2)$

$= \frac{1}{3} n(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2)$ حسب فرضية التراجع $t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

$= (n+1)(n+2)\left(\frac{1}{3} n + 1\right)$

$= \frac{1}{3}(n+1)(n+1+1)(n+1+2)$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $t_n = \frac{1}{3} n(n+1)(n+2)$

التمرين ــ 12

من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ نضع :

$S_n = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + ... + (n-1) \times 2^{n-2}$

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ فإن :

$S_n = (n-1)2^n - n \times 2^{n-1} + 1 = 1 + \left(\frac{1}{2} n - 1\right) \times 2^n$

الحـل ــ 12

لاحظ أن : $\left(\frac{1}{2} n - 1\right) \times 2^n = \frac{1}{2} n \times 2^n - 2^n = n\, 2^{n-1} - 2^n$

و $(n-1)2^n - n\, 2^{n-1} = n\, 2^n - 2^n - n\, 2^{n-1} = n\, 2^{n-1}(2-1) - 2^n = n\, 2^{n-1} - 2^n$

إذن : $(n-1)2^n - n \times 2^{n-1} + 1 = 1 + \left(\frac{1}{2} n - 1\right) 2^n$

منه : يكفي إثبات أن $S_n = \left(\frac{1}{2} n - 1\right) \times 2^n + 1$ بالتراجع كما يلي :

من أجل $n = 2$: $S_1 = 1$

و : $1 + \left(\frac{1}{2}(2) - 1\right) \times 2^2 = 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 2$

لنفرض أن $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n$ من أجل $n > 2$

هل : $S_{n+1} = 1 + \left(\frac{1}{2}(n+1) - 1\right) \times 2^{n+1}$ ؟

لدينا : $S_{n+1} = 1 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + ... + (n-1) \times 2^{n-2} + n \times 2^{n-1}$

$= S_n + n \times 2^{n-1}$

$= 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n + n \times 2^{n-1}$ حسب فرضية التراجع .

$= 1 + n \times 2^{n-1} - 2^n + n \times 2^{n-1}$

$= 1 + 2n \times 2^{n-1} - 2^n$

$= 1 + n \times 2^n - 2^n$

$= 1 + \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}\right) \times 2^{n+1}$

$= 1 + \left(\frac{1}{2}(n+1) - 1\right) \times 2^{n+1}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ فإن $S_n = 1 + \left(\frac{1}{2}n - 1\right) \times 2^n$

التمرين ــ 13

الرمز $n\,!$ يقرأ عاملي n حيث $\begin{cases} n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n & \text{من أجل } n > 0 \\ 0! = 1 & \text{من أجل } n = 0 \end{cases}$

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n \times n! = (n+1)! - 1$$

الحــل ــ 13

من أجل $n = 1$ لدينا : $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

نفرض أن : $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n(n!) = (n+1)! - 1$

هل : $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n(n!) + (n+1)(n+1)! = (n+1+1)! - 1$ ؟

لدينا $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n(n!) + (n+1)(n+1)! = [(n+1)! - 1] + (n+1)(n+1)!$

$= (n+1)!\,(1 + n + 1) - 1$

$= (n+1)!\,(n+2) - 1$

$= (n+2)! - 1$

$= (n+1+1)! - 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + ... + n(n!) = (n+1)! - 1$$

التمرين ــ 14

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $n! \geq 2^{n-1}$

الحــل ــ 14

من أجل $n = 1$ لدينا $1! = 1$

$2^{1-1} = 2^0 = 1$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 1$

لنفرض أن $n! \geq 2^{n-1}$ من أجل $n > 1$

هل $(n+1)! \geq 2^{n+1-1}$ أي هل $(n+1)! \geq 2^n$

لدينا (1) .. .. $n! \geq 2^{n-1}$ حسب فرضية التراجع .

و (2)................ $n + 1 \geq 2$ لأن $n > 1$

بضرب المتباينتين (1) و (2) طرف لطرف نحصل على $n!\,(n+1) \geq 2^{n-1} \times 2$

أي $(n+1)! \geq 2^n$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $n! \geq 2^{n-1}$

التمرين ـــ 15 " متباينة برنولي "

a عدد حقيقي موجب تماما .

1ـ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$

2ـ استنتج أن إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

الحـل ـ 15

1ـ الاستدلال بالتراجع :

من أجل $n = 1$: $(1 + a)^n = (1 + a)^1 = 1 + a$

و $1 + n\,a = 1 + a$

إذن : $(1 + a)^n = 1 + n\,a$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$ من أجل $n > 1$

هل $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)\,a$ ؟

أي هل $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + n\,a + a$ ؟

لدينا حسب فرضية التراجع : $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$ ....(1)

نضرب طرفي هذه المتباينة في نفس العدد الحقيقي الموجب $(1 + a)$ فنحصل على :

$$(1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + n\,a)(1 + a)$$

أي : $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + n\,a + a + n\,a^2$

لكن : $1 + n\,a + a + n\,a^2 \geq 1 + n\,a + a$ لأن $n\,a^2 > 0$

إذن : $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + n\,a + a$

أي : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$

2 ـ إذا كان $q > 1$ فإن يوجد عدد حقيقي موجب تماما a حيث $q = 1 + a$

منه : $q^n = (1 + a)^n$

لكن $(1 + a)^n \geq 1 + n\,a$

أي : $q^n \geq 1 + n\,a$

بما $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + n\,a = +\infty$ و $q^n \geq 1 + n\,a$ فإن $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

التمرين ـــ 16

(u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 2\,u_n - 3$

1 ـ أحسب $u_1\,;\,u_2\,;\,u_3\,;\,u_4\,;\,u_5$

2 ـ استنتج عبارة $3 - u_n$ بدلالة n ثم برهن صحتها بالتراجع .

3 ـ استنتج عبارة u_n بدلالة n

الحـل ـ 16

$$u_1 = 2\,u_0 - 3 = 2(2) - 3 = 1$$
$$u_2 = 2\,u_1 - 3 = 2(1) - 3 = -1$$
$$u_3 = 2\,u_2 - 3 = 2(-1) - 3 = -5$$
$$u_4 = 2\,u_3 - 3 = 2(-5) - 3 = -13$$
$$u_5 = 2\,u_4 - 3 = 2(-13) - 3 = -29$$

2 ـ لاحظ أن :

$$3 - u_0 = 3 - 2 = 1 = 2^0$$
$$3 - u_1 = 3 - 1 = 2 = 2^1$$
$$3 - u_2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$$
$$3 - u_3 = 3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$3 - u_4 = 3 + 13 = 16 = 2^4$$
$$3 - u_5 = 3 + 29 = 32 = 2^5$$

نستنتج أن $3 - u_n = 2^n$

لنبرهن هذه الخاصية بالتراجع :

لدينا الخاصية محققة من أجل $n = 0$ و $n = 1$ و $n = 2$ و $n = 3$ و $n = 4$ و $n = 5$

نفرض أن $3 - u_n = 2^n$ من أجل $n > 5$

هل $3 - u_{n+1} = 2^{n+1}$ ؟

لدينا : $3 - u_{n+1} = 3 - (2u_n - 3)$
$= 6 - 2u_n$
$= 2(3 - u_n)$
$= 2 \times 2^n$ لأن $3 - u_n = 2^n$ حسب فرضية التراجع
$= 2^{n+1}$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $3 - u_n = 2^n$

3 ــ لدينا : من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_n = 2^n$ إذن $u_n = 3 - 2^n$

التمرين ــ 17

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1)$

1 ــ أحسب S_1 ; S_2 ; S_3 ; S_4

2 ــ استنتج عبارة S_n بدلالة n ثم برهن عن صحتها بالتراجع .

3 ــ برهن عن صحة عبارة S_n السابقة باستعمال قانون مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية .

الحـل ــ 17

1 ــ من أجل $n = 1$ لدينا : $2n - 1 = 2(1) - 1 = 1$

إذن : $S_1 = 1$ لاحظ أن $S_1 = 1^2$

من أجل $n = 2$ لدينا : $2n - 1 = 2(2) - 1 = 3$

إذن : $S_2 = 1 + 3 = 4$ لاحظ أن $S_2 = 2^2$

من أجل $n = 3$ لدينا : $2n - 1 = 2(3) - 1 = 5$

إذن : $S_3 = 1 + 3 + 5 = 9$ لاحظ أن $S_3 = 3^2$

من أجل $n = 4$ لدينا : $2n - 1 = 2(4) - 1 = 7$

إذن : $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ لاحظ أن $S_4 = 4^2$

2 ــ نلاحظ أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = n^2$

لنبرهن صحة هذه الخاصية بالتراجع .

✓ الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$; $n = 2$; $n = 3$; $n = 4$

✓ نفرض أن $S_n = n^2$ من أجل $n > 4$

هل $S_{n+1} = (n + 1)^2$ ؟

لدينا : $S_{n+1} = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1)$
$= S_n + 2n + 1$
$= n^2 + 2n + 1$ لأن $S_n = n^2$ حسب فرضية التراجع
$= (n + 1)^2$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $S_n = n^2$

3 ــ $S_n = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$

لاحظ أن S_n هو مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية حدها الأول 1 و أساسها 2 لتكن (u_n) هذه المتتالية .

نضع : $u_1 = 1$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $u_n = 1 + 2(n - 1)$

أي : $u_n = 2n - 1$

منه : $1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = \dfrac{(1 + 2n - 1)}{2} \times n$ حيث n هو عدد الحدود

أي : $1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = \dfrac{2n}{2} \times n = n^2$

أي : $S_n = n^2$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 18

(u_n) متتالية معرفة بـــ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = u_n + 2$

(v_n) متتالية معرفة بـــ $v_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = u_n + v_n$

1 ــ عبرعن u_n بدلالة n

2 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 + n^2$

<u>الحـل ــ 18</u>

1 ــ لدينا : $u_{n+1} = u_n + 2$ إذن حسب التعريف (u_n) متتالية حسابية أساسها 2 و حدها الأول $u_0 = 1$ إذن n : $u_n = 1 + 2n$

2 ــ لنبرهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 1 + n^2$

✓ من أجل0 = n : $1 + n^2 = 1 + 0^2 = 1$ و $v_0 = 1$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$

✓ لنفرض أن $v_n = 1 + n^2$ من أجل $n > 0$

هل $v_{n+1} = 1 + (n+1)^2$ ؟

لدينا :

$$v_{n+1} = u_n + v_n$$
$$= 1 + 2n + 1 + n^2$$
$$= 1 + (n^2 + 2n + 1)$$
$$= 1 + (n+1)^2$$

لأن $u_n = 1 + 2n$ و $v_n = 1 + n^2$ حسب فرضية التراجع

إذن : الخاصية صحيحة من أجل n + 1

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_n = 1 + n^2$

<u>التمرين ــ 19</u>

(u_n) متتالية معرفة بــ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 2$

<u>الحـل ــ 19</u>

من أجل 0 = n لدينا : $0 \le 1 \le 2$ أي $0 \le u_0 \le 2$

منه الخاصية صحيحة من أجل 0 = n

من أجل 1 = n : $u_1 = \sqrt{u_0 + 2} = \sqrt{3}$

بما أن $0 \le \sqrt{3} \le 2$ فإن $0 \le u_1 \le 2$

منه الخاصية صحيحة من أجل 1 = n

نفرض أن $0 \le u_n \le 2$ من أجل $n > 1$

هل $0 \le u_{n+1} \le 2$ ؟

لدينا $0 \le u_n \le 2$ إذن : $0 + 2 \le u_n + 2 \le 2 + 2$

أي : $2 \le u_n + 2 \le 4$

أي $\sqrt{2} \le \sqrt{u_n + 2} \le \sqrt{4}$

أي : $\sqrt{2} \le u_{n+1} \le 2$

أي : $0 \le u_{n+1} \le 2$ لأن $0 < \sqrt{2}$

منه الخاصية صحيحة من أجل n + 1

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $0 \le u_n \le 2$

<u>التمرين ــ20</u>

p دالة كثير حدود معرفة على R بــ $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$

1 ــ تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x : $p(x+1) - p(x) = x^2$

2 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n) \in N$

3 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

<u>الحـل ــ20</u>

1 ــ ليكن $x \in R$

لدينا :

$$p(x+1) - p(x) = \frac{1}{3}(x+1)^3 - \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{6}(x+1) - \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\right]$$

$$= \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1) + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6} - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x$$

$=x^2$ و هو المطلوب

لاحظ أن $N \subset R$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $p(n+1) - p(n) = n^2$

أي : $p(n+1) = p(n) + n^2$

2 ـ لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n) \in N$

نبرهن عن صحة هذه الخاصية بالتراجع كما يلي :

✓ من أجل $n = 0$ لدينا $p(0) = \frac{1}{3}(0) - \frac{1}{2}(0) + \frac{1}{6}(0) = 0$ و $0 \in N$

إذن : الخاصية محققة من أجل $n = 0$

✓ نفرض أن $p(n) \in N$ من أجل $n > 0$

هل $p(n+1) \in N$ ؟

لدينا حسب السؤال (1) : $p(n+1) = p(n) + n^2$

و حسب فرضية التراجع : $p(n) \in N$

إذن : $(p(n) + n^2) \in N$

أي : $p(n+1) \in N$

أي : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $p(n) \in N$

3 ـ لتكن الخاصية : من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

✓ من أجل $n = 0$ لدينا : $p(0+1) = p(1) = \frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{2}(1)^2 + \frac{1}{6}(1)$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2-3+1}{6} = 0$$

و الكتابة $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ من أجل $n = 0$ تكتب $0^2 = 0$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

✓ نفرض أن : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ من أجل $n > 0$

هل $p(n+1+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2$ ؟

لدينا حسب السؤال (1) : $p(n+1) = p(n) + n^2$

إذن : $p[(n+1)+1] = p(n+1) + (n+1)^2$

أي : $p(n+1+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 + (n+1)^2$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $p(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

التمرين ـــ21

(u_n) متتالية معرفة على N^* بـ $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1 ـ أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{n+1}$

2 ـ استنتج قيمة المجموع $\frac{1}{1427 \times 1428} + \frac{1}{1428 \times 1429} + ... + \frac{1}{2007 \times 2008}$

الحـل ـ21

1 ـ الاستدلال بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن :

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{n+1}$$

✓ من أجل العنصرين u_1, u_2 لدينا :

$$u_1 + u_2 = \frac{1}{1(1+1)} + \frac{1}{2(2+1)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{12}$$

في هذه الحالة $n = 2$ و $\frac{n}{n+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$

بما أن $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ فإن الخاصية محققة من أجل العنصرين u_1 و u_2

✓ نفرض أن $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{n+1}$

هل $u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$ ؟

لدينا $u_1 + u_2 + ... + u_n + u_{n+1} = \frac{n}{n+1} + u_{n+1}$ حسب فرضية التراجع .

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(n + \frac{1}{(n+1+1)}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n^2+2n+1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

$= \frac{n+1}{n+1+1}$ منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{n}{n+1}$

2 ــ لدينا من أجل $n = 1426$ فإن : $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + ... + \frac{1}{1426 \times 1427} = \frac{1426}{1426+1} = \frac{1426}{1427}$

و من أجل $n = 2007$ فإن : $\frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + ... + \frac{1}{1426 \times 1427} + \frac{1}{1427 \times 1428} + ... + \frac{1}{2007 \times 2008} = \frac{2007}{2008}$

منه : $\frac{1426}{1427} + \frac{1}{1427 \times 1428} + ... + \frac{1}{2007 \times 2008} = \frac{2007}{2008}$

أي : $\frac{1}{1427 \times 1428} + \frac{1}{1428 \times 1429} + ... + \frac{1}{2007 \times 2008} = \frac{2007}{2008} - \frac{1426}{1427} = \frac{581}{2865416}$

التمرين ــ 22

(u_n) متتالية معرفة بــ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 3}$

أثبت أن من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 1$

الحــل ــ 22

نستعمل الاستدلال بالتراجع كما يلي :

$u_0 = 1$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

✓ من أجل $n = 1$: $u_1 = \frac{u_0 + 1}{u_0 + 3} = \frac{1+1}{1+3} = \frac{1}{2}$ و $0 \le \frac{1}{2} \le 1$

إذن : $0 \le u_1 \le 1$ منه الخاصية محققة من أجل $n = 1$.

✓ لنفرض أن $0 \le u_n \le 1$ من أجل $n > 1$

هل $0 \le u_{n+1} \le 1$ ؟

لدينا : $0 \le u_n \le 1$ منه : $1 \le u_n + 1 \le 2$ (نضيف 1 إلى الطرفين)

و من جهة أخرى : $0 \le u_n \le 1$ منه : $3 \le u_n + 3 \le 4$ (نضيف 3 إلى الطرفين)

أي : $\frac{1}{4} \le \frac{1}{u_n + 3} \le \frac{1}{3}$ (بتطبيق خاصية المقلوب)

إذن لدينا المتباينتين
$$\begin{cases} 1 \le u_n + 1 \le 2 \\ \dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{u_n + 3} \le \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

بإجراء الجداء طرف لطرف نحصل على : $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3} \le \dfrac{2}{3}$

أي : $\dfrac{1}{4} \le u_{n+1} \le \dfrac{2}{3}$

و خاصة : $0 \le \dfrac{1}{4} \le u_{n+1} \le \dfrac{2}{3} \le 1$

أي : $0 \le u_{n+1} \le 1$

أي الخاصية محققة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \le u_n \le 1$.

النهايات و الإستمرارية

1 ـ النهاية المنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف : f دالة عددية معرفة على مجال من الشكل $]x_0 ; +\infty[$ و ℓ عدد حقيقي القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي ℓ يعني أن كل مجال مفتوح يشمل العدد ℓ يشمل أيضا كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي .

و نكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ و نقرأ : نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$ هي ℓ

ملاحظة :

إذا كان $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ نقول أن المستقيم ذو المعادلة $y = \ell$ هو مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f عند $+\infty$

أمثلة : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

2 ـ النهاية غير المنتهية عند $+\infty$ أو $-\infty$:

تعريف : f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0 ; +\infty[$

القول أن نهاية f عند $+\infty$ هي $+\infty$ (على الترتيب هي $-\infty$) يعني أن كل مجال من الشكل $]A ; +\infty[$ (على الترتيب $]-\infty ; A[$) حيث $A \in IR$ يشمل كل قيم $f(x)$ من أجل x كبير بالقدر الكافي و نكتب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (على الترتيب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$)

و نقرأ نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$ هي $+\infty$ (على الترتيب نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى $+\infty$ هي $-\infty$)

أمثلة : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ ؛ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

3 ـ المستقيم المقارب المائل :

تعريف : ليكن (C_f) المنحنى البياني لدالة f في معلم . و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$. القول أن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) يعني أن $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

(على الترتيب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$)

مثال : f دالة معرفة على IR^* بـ $f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x^2}$

لدينا

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x - 3)] = \lim_{x \to +\infty} \left[2x - 3 + \frac{1}{x^2} - (2x - 3)\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$$
$$= 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

بنفس الطريقة لدينا : $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (2x - 3)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل لمنحنى الدالة f عند $-\infty$

4 ـ النهاية المنتهية لدالة عند عدد حقيقي :

تعريف : f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a ; x_0[\cup]x_0 ; b[$ و $\ell \in R$

القول أن نهاية f عند x_0 هي ℓ يعني أن كل مجال مفتوح يشمل العدد ℓ يشمل أيضا كل قيم $f(x)$ من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 و نكتب $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ و نقرأ نهاية $f(x)$ لما x يؤول إلى x_0 هي ℓ

مثال : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1}$

$$= \lim_{x \to 1} x + 1$$
$$= 2$$

إذن عندما يقترب x من 1 بالقدر الكافي فإن العدد $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ يقترب بالقدر الكافي من 2

5 ـ النهاية غير المنتهية عند عدد حقيقي :

تعريف : f دالة معرفة على مجال من الشكل $]a ; x_0[\cup]x_0 ; b[$.

القول أن نهاية f عند x_0 هي $+\infty$ يعني أن كل مجال من الشكل $]A ; +\infty[$ حيث $A \in R$ يشمل كل قيم f(x) من أجل x قريب بالقدر الكافي من x_0 و نكتب $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ و نقرأ نهاية f(x) لما x يؤول إلى x_0 هي $+\infty$

مثال : $\lim_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to 3} (x-3)^2 = 0$

حذار ! في بعض الحالات يجب التمييز بين x يؤول إلى x_0 بقيم أكبر من x_0 أي $x - x_0 > 0$ و x يؤول إلى x_0 بقيم أصغر من x_0 أي $x - x_0 < 0$

مثال : لا يمكن حساب $\lim_{x \to 0} 1/x$ لأن نميز حالتين :

✓ لما $x \overset{>}{\to} 0$ فإن $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} 1/x = +\infty$ لأن $1/x > 0$

✓ لما $x \overset{<}{\to} 0$ فإن $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} 1/x = -\infty$ لأن $1/x < 0$

ملاحظة : إذا كان (C_f) منحنى الدالة f في معلم و كان (Δ) مستقيما معادلته $x = a$ و كانت $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ فإن المستقيم (Δ) مقارب للمنحنى (C_f) عند a .

6 ـ عمليات على النهايات : لتكن f و g دالتان عدديتان .

α يمثل إما عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$ و ℓ ؛ ℓ' أعداد حقيقية .

نهاية مجموع دالتين :

$\lim_{x \to \alpha} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} f(x) + g(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

نهاية جداء دالتين :

$\lim_{x \to \alpha} f(x)$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \to \alpha} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} f(x) \times g(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت

نهاية حاصل قسمة دالتين :

$\lim_{x \to \alpha} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$	ℓ/ℓ'	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة : الرمز ح ع ت يقرأ حالة عدم التعيين و معناه أنه لا يمكن إستنتاج قيم النهاية مباشرة لذلك نلجأ إلى إزالتها بطرق مختلفة بتطبيق خواص العمليات المعرفة على الأعداد الحقيقية كالعامل المشترك و الإختزال و الضرب في المرافق و تعريف العدد المشتق كما يلي :

الإختزال: نريد حساب $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$

لدينا $\lim\limits_{x \to -1} (x^2-1) = 0$ و $\lim\limits_{x \to -1} x+1 = 0$

إذن : حسب جدول نهاية حاصل قسمة دالتين فان $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ هي ح ع ت لإزالتها نلجأ إلى الإختزال

كمايلي :

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}$$

$$= \lim_{x \to -1} (x-1) = -2$$

العامل المشترك : نريد حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ إذن حسب جدول نهاية مجموع دالتين فان

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x$ هي ح ع ت

لإزالتها نلجأ إلى العامل المشترك كمايلي : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} x^2$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} 2/x = 0$

$= +\infty$

الضرب في المرافق : نريد حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

إذن حسب جدول نهاية مجموع دالتين فان $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ هي ح ع ت

لإزالتها نلجأ إلى الضرب في المرافق كمايلى :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$= 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$

خاصية العدد المشتق: نريد حساب $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

لدينا : $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x - 1) = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

إذن: حسب جدول نهاية حاصل قسمة دالتين فان $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$ هي ح ع ت

لإزالتها نلجأ إلى إستخدام العدد المشتق كمايلى :

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ $f(x) = \cos x$

نعلم أن f قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة f' هي الدالة المعرفة على IR بـ $f'(x) = -\sin x$

إذن $f'(0) = -\sin 0 = 0$

لكن حسب تعريف العدد المشتق للدالة f عند 0 فإن :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) \quad \text{لأن} \quad f(0) = 1$$

نتيجة : $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) = f'(0) = 0$ لأن $f'(0) = 0$

7 – نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$

لحساب نهاية دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة فقط .

مثال : $\lim_{x \to +\infty} -x^3 + 2x^2 - \sqrt{2}\,x - 1 = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$

حذار! $\lim_{x \to a} -x^3 + 2x^2 - \sqrt{2}\,x - 1 = -a^3 + 2a^2 - \sqrt{2}\,a - 1$ من أجل $a \in IR$

8 – نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$

لحساب نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط على الحد الأعلى درجة في المقام .

مثال : $\lim_{x \to +\infty} \frac{x - 2}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

نشاط :

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + x - 2}$

1 – عين مجموعة تعريف الدالة f .

2 – أحسب نهايات الدالة f على حدود مجموعة تعريفها .

الحــل :

1 – تكون f معرفة إذا وفقط إذا كان $x^2 + x - 2 \neq 0$

لنحل في IR المعادلة $x^2 + x - 2 = 0$

$\Delta = 1 - 4(-2) = 9$ إذن : $\begin{cases} x_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1 \\ x_2 = \frac{-1 - 3}{2} = -2 \end{cases}$

نتيجة : مجموعة تعريف الدالة f هي : $]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

2 – النهايات :

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = 0$ (نهاية دالة ناطقة عند $-\infty$)

$\lim_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{2x + 3}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \overset{<}{\to} -2} \frac{2(-2) + 3}{x^2 + x - 2}$

لاحظ أن :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x^2 + x - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

إذن : $\lim_{x \overset{<}{\to} -2} (x^2 + x - 1) = 0^+$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} -2} (x^2 + x - 1) = 0^-$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} (x^2 + x - 1) = 0^-$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} (x^2 + x - 1) = 0^+$

منه : $\lim_{x \overset{<}{\to} -2} f(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{-1}{y} = -\infty$

ملاحظة : نقبل أن 0^+ يعني أن العدد يقترب من صفر بقيم موجبة و 0^- يعني أن العدد يقترب من صفر بقيم سالبة .

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{2(-2)+3}{y} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{2(1)+3}{y} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{5}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{2(1)+3}{y} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{5}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$$ (نهاية دالة ناطقة عند $+\infty$)

9 ـ نهاية دالة مركبة

مبرهنة :

c ; b ; a تمثل إما أعداد حقيقية أو $(+\infty)$ أو $(-\infty)$

u ، v ، f دوال عددية حيث $f = v \circ u$ (o يرمز إلى مركب دالتين)

إذا كانت $\lim_{x \to a} u(x) = b$ و كانت $\lim_{x \to b} v(x) = c$ فإن $\lim_{x \to a} f(x) = c$

مثال : $u : x \mapsto \frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}$ ؛ $v : x \mapsto \sin x$

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} u(x) = \frac{\pi}{2}$ و $\lim_{x \to \pi/2} v(x) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

نتيجة : $\lim_{x \to +\infty} v \circ u(x) = 1$ أي $\lim_{x \to +\infty} v(u(x)) = 1$

أي $\lim_{x \to +\infty} v\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = 1$

أي $\lim_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = 1$

10 ـ حساب النهاية بالمقارنة :

مبرهنة (1)

f ، g ، h دوال عددية معرفة على مجال من الشكل $]A ; +\infty[$. ℓ عدد حقيقي .

إذا كانت $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \ell$ و $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell$ و إذا كان من أجل كل x كبير بالقدر الكافي $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

مثال : لتكن f دالة معرفة على IR^* بـ $f(x) = \frac{\cos x}{x}$

نعلم أن من أجل كل x من IR فإن $-1 \leq \cos x \leq 1$

إذن : من أجل $x > 0$ فإن $-1/x \leq \frac{\cos x}{x} \leq 1/x$

أي : من أجل $x \in]0 ; +\infty[$ فإن $-1/x \leq f(x) \leq 1/x$

لكن $\lim_{x \to +\infty} -1/x = \lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

مبرهنة (2)

f ، g دالتان معرفتان على مجال من الشكل $]A ; +\infty[$.

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ و من أجل كل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \geq g(x)$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

مبرهنة (3)

f ، g دالتان معرفتان على مجال من الشكل $]A ; +\infty[$.

إذا كان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ و من أجل كل x كبير بالقدر الكافي $f(x) \leq g(x)$ فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

ملاحظة : يمكن إستعمال المبرهنات (1) ، (2) و (3) إذا كانت النهايات عند ∞ - أو عند عدد حقيقي .

تعريف الإستمرارية

f دالة معرفة على مجموعة D_f و a عدد حقيقي غير معزول من D_f

القول أن الدالة f مستمرة عند a يعني أن $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ملاحظة : إذا كانت f دالة مستمرة عند كل عنصر من المجال I نقول أن f مستمرة على I

هند سيا : تكون دالة f مستمرة على مجال I إذا كان من الإمكان رسم منحناها البياني على هذا المجال دون رفع القلم (اليد) أي لا يوجد إنقطاع لهذا المنحنى على المجال I .

نتائج :

- ✓ الدالة cos و الدالة sin مستمرة على IR
- ✓ الدوال كثيرات الحدود مستمرة على IR
- ✓ الدوال الناطقة مستمرة على مجموعات تعريفها .

نشاط :

f دالة معرفة على المجال [3 ; 2 -] كمايلي : $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 : x \in [-2 ; 0[& \text{إذا كان} \\ x \quad : x \in [0 ; 3[& \text{إذا كان} \end{cases}$

1 ــ هل تقبل الدالة f نهاية عند 0 ؟

2 ــ هل الدالة f مستمرة على المجال [3 ; 2 -] ؟

3 ــ أعط مجالا جزئيا من المجال [3 ; 2 -] تكون فيه الدالة f مستمرة .

الحــل :

1 ــ لاحظ أن الدالة f معرفة على المجال [0 ; 2 -[بــ $f(x) = -x^2 + 2$ إذن يمكن حساب $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$ كما يلي :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} -x^2 + 2 = -(0)^2 + 2 = 2$$

لاحظ أيضا أن الدالة f معرفة على المجال [3 ; 0] بــ $f(x) = x$ إذن يمكن حساب $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ كما يلي :

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x = 0$$

من جهة أخرى الدالة f معرفة عند 0 لأن $0 \in [0 ; 3[$ و $0 \notin [-2 ; 0[$ إذن : $f(0) = 0$

خلاصة : $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = 2$ و $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0$ إذن : الدالة f لا تقبل نهاية محددة عند 0 و عليه فالدالة f ليست مستمرة عند 0 .

2 ــ العدد 0 عنصر من المجال [3 ; 2 -] و الدالة f ليست مستمرة عند 0 إذن فهي ليست مستمرة على المجال [3 ; 2 -[

3 ــ الدالة f معرفة على المجال [1/2- ; 1-] بــ $f(x) = -x^2 + 2$ إذن هي كثير حدود منه f مستمرة على المجال [1/2- ; 1-] .

مبرهنة القيم المتوسطة

نص المبرهنة :

f دالة معرفة و مستمرة على مجال [a ; b]

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين f(a) و f(b) فانه يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$

حالة خاصة : إذا كان $f(a) \times f(b) < 0$ فإن العدد $k = 0$ محصور بين f(a) و f(b)

إذن : يوجد c من المجال [a ; b] حيث $f(c) = 0$ أي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا و هو c على المجال [a ; b] .

المعادلة $f(x) = k$

إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال [a ; b] فانه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين f(a) و f(b) فالمعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c حيث $c \in [a ; b]$.

مثال : $f(x) = x^3 + x - 1$

f دالة كثير حدود إذن مستمرة على IR و خاصة فهي مستمرة على [0 ; 1]

لدينا : $f(0) = -1$ و $f(1) = 1$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي k من المجال [1 ; 1-] فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c حيث $c \in [0 ; 1]$

و خاصة $k = 0$ حيث $0 \in [-1 ; 1]$ إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل c من المجال [0 ; 1]

نشاط :

برهن أن المعادلة $x^3 - 2x = -2$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2 ; 1]$

الحـل :

لتكن f دالة معرفة على $[-2 ; 1]$ بـ $f(x) = x^3 - 2x$

✓ f دالة كثير حدود إذن f مستمرة على $[-2 ; 1]$

✓ $f(-2) = (-2)^3 - 2(-2) = -8 + 4 = -4$

✓ $f(1) = 1 - 2 = -1$

نتيجة : f تحقق شروط مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[-2 ; 1]$ أي من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-4 ; -1]$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا c في المجال $[-2 ; 1]$

بما أن $k = -2$ هو عنصر من المجال $[-4 ; -1]$ فإن المعادلة $f(x) = -2$ أي المعادلة $x^3 - 2x = -2$ تقبل على الأقل حلا c من المجال $[-2 ; 1]$

الدوال المستمرة و الرتيبة تماما على مجال $[a ; b]$

مبرهنة : إذا كانت f دالة مستمرة و رتيبة تماما على مجال $[a ; b]$ فإن من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا c في المجال $[a ; b]$.

إيجاد حصر لحل معادلة بالتنصيف :

الهدف من هذا العنصر هو البحث عن حل معادلة من الشكل $f(x) = 0$ على مجال $[a ; b]$ حيث f دالة مستمرة على المجال $[a ; b]$ لذلك نلجأ إلى إستعمال مبرهنة القيم المتوسطة كما يلي :

إذا تحقق أن f رتيبة تماما و مستمرة على $[a ; b]$ حيث $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a ; b]$ إذن لدينا حصرا أولا للعدد α حيث $a < \alpha < b$ و نبحث عن حصر آخر يكون أصغر من المجال $[a ; b]$ و ذلك بأخذ m_1 منتصف المجال $[a ; b]$ أي $m_1 = \dfrac{a+b}{2}$

نقوم بحساب $f(m_1)$ ثم نلجأ إلى النتيجة التالية :

إذا كان $f(m_1) \times f(a) < 0$ فإن $a < \alpha < m_1$ إذن المجال الثاني للحصر هو $[a ; m_1]$

إذا كان $f(m_1) \times f(b) < 0$ فإن $m_1 < \alpha < b$ إذن المجال الثاني للحصر هو $[m_1 ; b]$

نعيد نفس الخطوات على المجال الثاني لنحصل على المجال الثالث و هكذا حتى نحصل على أصغر مجال يشمل العدد α.

مثال : نريد تعيين حصرا لحل المعادلة $x^2 - x - 1 = 0$ على المجال $]-1 ; 0[$

نعتبر الدالة f معرفة على المجال $[-1 ; 0]$ بـ $f(x) = x^2 - x - 1$

لدينا $f'(x) = 2x - 1$

منه :

x	$-\infty$	1/2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

إذن : f متناقصة تماما على $]-\infty ; 1/2]$ و خاصة على المجال $[-1 ; 0]$

نتيجة : f متناقصة تماما و مستمرة على المجال $[-1 ; 0]$ و $f(0) = -1$ و $f(-1) = 1$

إذن $f(-1) \times f(0) < 0$ منه المعادلة $f(x) = 0$ أي $x^2 - x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-1 < \alpha < 0$

الخطوة الأولى : ليكن m_1 منتصف $[-1 ; 0]$ أي $m_1 = -1/2$

لدينا
$$f(m_1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4}$$

إذن : $f(m_1) \times f(-1) < 0$

منه : الحصر الجديد $-1 < \alpha < -1/2$

الخطوة الثانية : ليكن m_2 منتصف $[-1 ; -1/2]$ أي $m_2 = -3/4$

$$f(m_2) = f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{9 + 12 - 16}{16} = \frac{5}{16}$$

لدينا: $f(-3/4) \times f(-1/2) < 0$

إذن : الحصر الجديد $-3/4 < \alpha < -1/2$

الخطوة الثالثة : ليكن m_3 منتصف $[-3/4 ; -1/2]$ أي $m_3 = -5/8$

$$f(m_3) = f\left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{25}{64} + \frac{5}{8} - 1 = \frac{25+40-64}{64} = \frac{1}{64}$$

لدينا: $f(-5/8) \times f(-1/2) < 0$

إذن : الحصر الجديد $-5/8 < \alpha < -1/2$

يمكن مواصلة الحصر بهذه الطريقة حتى نحصل على أصغر مجال ممكن و ذلك بالقيام بأكبر عدد من الخطوات .

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين ـ 1

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1}$

1 ـ أوجد عدد حقيقيا A حيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x) \in]2,9 ; 3,1[$

2 ـ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3$ مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f على IR .

3 ـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

الحـل ـ 1

1 ـ لدينا $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-2}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$

إذن : من أجل x كبير بالقدر الكافي فإن $f(x) \in]2,9 ; 3,1[$

وعليه يمكن أخذ العدد A أكبر ما يمكن حيث إذا كان $x > A$ فإن $f(x) \in]2,9 ; 3,1[$

2 ـ بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$ فإن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 3$ مقارب للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3 ـ الوضعية :

$$f(x) - (3) = \frac{3x-2}{x+1} - 3 = \frac{3x-2-3x-3}{x+1} = \frac{-5}{x+1}$$

لندرس إشارة $f(x) - (3)$ على IR :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
-5	$-$	‖	$-$
$x+1$	$-$	‖	$+$
$\dfrac{-5}{x+1}$	$+$	‖	$-$

نتيجة : لما $x \in]-1 ; +\infty[$ لدينا $f(x) - 3 < 0$ إذن : (C_f) تحت (Δ)

لما $x \in]-\infty ; -1[$ لدينا $f(x) - 3 > 0$ إذن : (C_f) فوق (Δ)

التمرين ـ 2

f دالة معرفة على $]-1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

1 ـ أوجد عدد حقيقيا A حيث إذا كان $x < A$ فإن $f(x) \in]0,9 ; 1,1[$

2 ـ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 1$ مقارب للمنحنى (C_f) الممثل للدالة f على IR .

3 ـ أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم Δ .

الحـل ـ 2

1 ـ لدينا $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x} = 1$

إذن : من أجل x صغير بالقدر الكافي فإن $f(x) \in]0,9 ; 1,1[$

و عليه يمكن أخذ العدد A أصغر ما يمكن حيث إذا كان $x < A$ فإن $f(x) \in]0,9 ; 1,1[$

2 ـ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f

3 ــ الوضعية :

$$f(x) - 1 = \frac{x+1}{x-1} - 1 = \frac{x+1-x+1}{x-1} = \frac{2}{x-1}$$

لندرس إشارة $f(x) - 1$ على IR :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
2	+		+
$x - 1$	−		+
$\frac{2}{x-1}$	−		+

نتيجة : لما $x \in]-\infty ; 1[$ لدينا $f(x) - 1 < 0$ إذن : C_f تحت Δ

لما $x \in]1 ; +\infty[$ لدينا $f(x) - 1 > 0$ إذن : C_f فوق Δ

التمرين ــ 3

f دالة معرفة على $]1 ; +\infty[$ بـ $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$ و ليكن C_f تمثيلها البياني

1 ــ بين أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$.

2 ــ أدرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم Δ .

الحل ــ 3

1 ــ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} x + \frac{1}{x-1} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$

2 ــ

$$f(x) - x = x + \frac{1}{x-1} - x = \frac{1}{x-1}$$

لندرس إشارة $f(x) - x$ كما يلي :

	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	−		+
$\frac{1}{x-1}$	−		+

نتيجة : لما $x \in]-\infty ; 1[$ لدينا $f(x) - x < 0$ إذن : C_f تحت Δ

لما $x \in]1 ; +\infty[$ لدينا $f(x) - x > 0$ إذن : C_f فوق Δ

التمرين ــ 4

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 2x - 1 - \frac{2}{x^2+1}$ و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم

1 ــ بين أن المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب للمنحنى C_f عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2 ــ أدرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم Δ .

الحل ــ 4

1 ــ

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \to +\infty} 2x - 1 - \frac{2}{x^2+1} - (2x-1) ,$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{x^2+1} = 0$$

إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{x^2+1} = 0$$

إذن : المستقيم Δ ذو المعادلة $y = 2x - 1$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$

2 ــ الوضعية :

$$f(x) - (2x-1) = \left(2x - 1 - \frac{2}{x^2+1}\right) - (2x-1) = \frac{-2}{x^2+1}$$

بما أن $x^2 + 1 > 0$ فإن $\frac{-2}{x^2+1} < 0$ أي $f(x) - (2x - 1) < 0$

إذن : المنحنى C_f يقع تحت المستقيم Δ .

التمرين – 5

في كل حالة من الحالات التالية أوجد معادلة للمستقيم المقارب لمنحنى الدالة f_n عند $+\infty$ و عند $-\infty$

1 – $f_1(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ 5 – $f_5(x) = x + 3 - \frac{2}{|x|}$

2 – $f_2(x) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2}$ 6 – $f_6(x) = \frac{\sin x}{x} - x + 1$

3 – $f_3(x) = 2x + 1 + \frac{5}{x-3}$ 7 – $f_7(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x}$

4 – $f_4(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2 - 1}$ 8 – $f_8(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$

الحل – 5

1 –
$$\lim_{x \to \infty} f_1(x) - 1 = \lim_{x \to \infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{|x|}} - 1 = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f_1 عند ∞ أي عند $+\infty$ و $-\infty$

2 –
$$\lim_{x \to \infty} f_2(x) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \lim_{x \to \infty} -\frac{1}{3} - \frac{1}{x^2} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-1}{x^2} = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -1/3$ مقارب لمنحنى الدالة f_2 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

3 –
$$\lim_{x \to \infty} f_3(x) - (2x + 1) = \lim_{x \to \infty} 2x + 1 + \frac{5}{x-3} - (2x + 1) = \lim_{x \to \infty} \frac{5}{x-3} = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب لمنحنى الدالة f_3 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

4 –
$$\lim_{x \to \infty} f_4(x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to \infty} -\frac{1}{2}x + \frac{x}{x^2-1} - \left(-\frac{1}{2}x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x$ مقارب لمنحنى الدالة f_4 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

5 –
$$\lim_{x \to \infty} f_5(x) - (x + 3) = \lim_{x \to \infty} x + 3 - \frac{2}{|x|} - (x + 3) = \lim_{x \to \infty} \frac{-2}{|x|} = 0$$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب لمنحنى الدالة f_5 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

6 – $\lim\limits_{x\to\infty} f_6(x)-(-x+1)=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}-x+1-(-x+1)$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$

لكن : $-1\le \sin x \le 1$

منه : $\frac{-1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$ أو $\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{-1}{x}$ (حسب إشارة x)

بما أن $\lim\limits_{x\to\infty} 1/x=0$ و $\lim\limits_{x\to\infty} -1/x=0$ فان بالحصر $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

نتيجة : $\lim\limits_{x\to\infty} f_6(x)-(-x+1)=0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب لمنحنى الدالة f_6 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

7 – $f_7(x)=\frac{x^2+x-1}{1-2x}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} x^2+x-1 & 1-2x \\ \hline -\left(x^2-\frac{1}{2}x\right) & -\frac{1}{2}x-\frac{3}{4} \\ 0+\frac{3}{2}x-1 & \\ -\left(\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}\right) & \\ \hline 0-\frac{1}{4} & \end{array}$$

نتيجة : $x^2+x-1=(1-2x)\left(-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{4}$

منه : $\frac{x^2+x-1}{1-2x}=\left(-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)-\frac{1/4}{1-2x}$

أي : $f_7(x)=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}-\frac{1/4}{1-2x}$

إذن : $\lim\limits_{x\to\infty} f_7(x)-\left(-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-1/4}{1-2x}$

0 منه المستقيم ذو المعادلة $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$ مقارب لمنحنى الدالة f_7 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

8 – $f_8(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^2-1 \\ x^3-x & x \\ \hline x+1 & \end{array}$$

نتيجة : $x^3+1=(x^2-1)(x)+(x+1)$

إذن : $\frac{x^3+1}{x^2-1}=x+\frac{x+1}{x^2-1}$

منه : $f_8(x)=x+\frac{x+1}{x^2-1}$

أي : $\lim\limits_{x\to\infty} f_8(x)-x=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x^2}$

$=0$ منه المستقيم ذو المعادلة $y=x$ مقارب لمنحنى الدالة f_8 عند $+\infty$ و عند $-\infty$

التمرين – 6

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=2x+3$

1 – أحسب $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ثم إستنتج مجالا لقيم x حتى يكون f(x) ينتمي إلى]6,99 ; 7,01[

2 – α عدد حقيقي حيث $0<\alpha<1$. في أي مجال يجب إختيار x بحيث يكون f(x) ينتمي إلى المجال]7 - α ; 7 + α[؟

الحـل – 6

1 – $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)=2(2)+3=7$ لأن f كثير حدود مستمر على IR

$6{,}99<f(x)<7{,}01$ يكافئ $6{,}99<2x+3<7{,}01$

يكافئ $3{,}99<2x<4{,}01$

6 ـ
$$\lim_{x \to \infty} f_6(x) - (-x+1) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} - x + 1 - (-x+1)$$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x}$$

لكن : $-1 \le \sin x \le 1$

منه : $\frac{-1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$ أو $\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{-1}{x}$ (حسب إشارة x)

بما أن $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$ و $\lim_{x \to \infty} -1/x = 0$ فإن بالحصر $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

نتيجة : $\lim_{x \to \infty} f_6(x) - (-x+1) = 0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب لمنحنى الدالة f_6 عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

7 ـ $f_7(x) = \frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$x^2 + x - 1$	$1 - 2x$
$-\ x^2 - \frac{1}{2}x$	$-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
$0 + \frac{3}{2}x - 1$	
$-\ +\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$	
$0 - \frac{1}{4}$	

نتيجة : $x^2 + x - 1 = (1 - 2x)\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4}$

منه : $\frac{x^2 + x - 1}{1 - 2x} = \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - \frac{1/4}{1 - 2x}$

أي : $f_7(x) = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} - \frac{1/4}{1 - 2x}$

إذن : $\lim_{x \to \infty} f_7(x) - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-1/4}{1 - 2x} = 0$ منه المستقيم ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ مقارب لمنحنى الدالة f_7 عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

8 ـ $f_8(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$x^3 + 1$	$x^2 - 1$
$x^3 - x$	x
$x + 1$	

نتيجة : $x^3 + 1 = (x^2 - 1)(x) + (x + 1)$

إذن : $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

منه : $f_8(x) = x + \frac{x + 1}{x^2 - 1}$

أي : $\lim_{x \to \infty} f_8(x) - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1}{x^2 - 1}$
$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2} = 0$$
منه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب لمنحنى الدالة f_8 عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

التمرين ـ 6

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = 2x + 3$

1 ـ أحسب $\lim_{x \to 2} f(x)$ ثم إستنتج مجالا لقيم x حتى يكون f(x) ينتمي إلى]6,99 ; 7,01[

2 ـ α عدد حقيقي حيث $0 < \alpha < 1$. في أي مجال يجب إختيار x بحيث يكون f(x) ينتمي إلى المجال]7 - α ; 7 + α[؟

الحل ـ 6

1 ـ $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2(2) + 3 = 7$ لأن f كثير حدود مستمر على IR

$6,99 < f(x) < 7,01$ يكافئ $6,99 < 2x + 3 < 7,01$

يكافئ $3,99 < 2x < 4,01$

يكافئ $1,995 < x < 2,005$

يكافئ $x \in]1,995 ; 2,005[$

2 ـ $f(x)$ ينتمي إلى المجال $]7 - \alpha ; 7 + \alpha[$ هذا يعني أن $7 - \alpha < f(x) < 7 + \alpha$

أي : $7 - \alpha < 2x + 3 < 7 + \alpha$

أي : $7 - \alpha - 3 < 2x + 3 - 3 < 7 + \alpha - 3$

أي : $4 - \alpha < 2x < 4 + \alpha$

أي : $\frac{4-\alpha}{2} < x < \frac{4+\alpha}{2}$

منه : $x \in \left]\frac{4-\alpha}{2} ; \frac{4+\alpha}{2}\right[$ و هو المجال المطلوب .

التمرين ـ 7

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$

1 ـ أحسب $\lim_{x \to 4} f(x)$

2 ـ أوجد مجالا I يشمل 4 بحيث إذا كان $x \in I$ فإن $f(x) \in]2,99 ; 3,10[$

الحـل ـ 7

1 ـ $\lim_{x \to 4} f(x) = \frac{4+2}{4-2} = \frac{6}{2} = 3$ (f معرفة عند 4)

2 ـ $\lim_{x \to 4} f(x) = 3$ إذن : x يقترب بالقدر الكافي من 4 كما يلي :

$2,99 < f(x) < 3,10$ يكافئ $2,99 < \frac{x+2}{x-2} < 3,10$

يكافئ $2,99(x-2) < x+2 < (x-2)\,3,10$ لأن $x - 2 > 0$.

يكافئ $2,99\,x - 5,98 < x + 2 < 3,10\,x - 6,20$

يكافئ $\begin{cases} x + 2 < 3,10\,x - 6,20 \\ x + 2 > 2,99\,x - 5,98 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 8,20 < 2,10\,x \\ 7,98 > 1,99\,x \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x > \frac{8,20}{2,10} \\ x < \frac{7,98}{1,99} \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x > 3,904 \\ x < 4,01 \end{cases}$

يكافئ $x \in]3,904 ; 4,01[$ و هو المجال المطلوب .

التمرين ـ 8

1 ـ أدرس النهايات عند $+\infty$ ، $-\infty$ و عند 1 للدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$

2 ـ حدد المستقيمات المقاربة لمنحنى الدالة f

الحـل ـ 8

1 ـ f معرفة على المجال $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x} = 2$ (نهاية دالة ناطقة عند $-\infty$)

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{2(1)+5}{x-1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{7}{y} = -\infty$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 1$ فإن $x - 1 \overset{<}{\to} 0$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{2(1)+5}{x-1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{7}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $x - 1 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

2 ــ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 2$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = -\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f على يسار 1

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = +\infty$ إذن المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب لمنحنى الدالة f على يمين 1

التمرين ــ 9

فيما يلي عين مجموعة تعريف كل دالة ثم أدرس النهايات عند أطراف مجموعة التعريف :

1 ــ $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5}{x - 2}$ 3 ــ $h(x) = \dfrac{x + 1}{(x - 2)^2}$

2 ــ $g(x) = \dfrac{-4x + 1}{3 - x}$ 4 ــ $\ell(x) = \dfrac{x + 1}{(x - 1)(4 - x)}$

الحـل ــ 9

1 ــ f معرفة على المجال $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{2(2)^2 + 5}{x - 2} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \dfrac{13}{y} = -\infty$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 2$ فإن $x - 2 \overset{<}{\to} 0$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{2(2) + 5}{x - 2} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \dfrac{13}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 2$ فإن $x - 2 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

2 ــ g معرفة على المجال $]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{-4x}{-x} = 4$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 3} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 3} \dfrac{-4(3) + 1}{3 - x} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \dfrac{-11}{y} = -\infty$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 3$ فإن $3 - x \overset{>}{\to} 0$

$\lim_{x \overset{>}{\to}} g(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 3} \dfrac{-4(3) + 1}{3 - x} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \dfrac{-11}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 3$ فإن $3 - x \overset{<}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{-x} = 4$$

3 ــ h معرفة على المجال $]-\infty ; 2[\cup]2 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} h(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{2 + 1}{(x - 2)^2} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \dfrac{3}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 2$ فإن $(x - 2)^2 \overset{>}{\to} 0$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} h(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 2} \dfrac{2 + 1}{(x - 2)^2} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \dfrac{3}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 2$ فإن $(x - 2)^2 \overset{>}{\to} 0$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$$

4 ـ ℓ معرفة على المجال $]-\infty ; 1[\cup]1 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$

ميز بين الحالات التالية :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$(x-1)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

لما $x \overset{<}{\to} 1$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{<}{\to} 0$

لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{>}{\to} 0$

لما $x \overset{<}{\to} 4$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{>}{\to} 0$

لما $x \overset{>}{\to} 4$ فإن $(x-1)(4-x) \overset{<}{\to} 0$

منه النتائج التالية :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} \ell(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{2}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \ell(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{2}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 4} \ell(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 4} \frac{4+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{5}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 4} \ell(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 4} \frac{4+1}{(x-1)(4-x)} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{5}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \ell(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{-x^2+5x-4} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ell(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{-x^2+5x-4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{-x^2} = 0$$

<u>التمرين ـ 10</u>

نفس أسئلة التمرين 9 بالنسبة للدوال المعرفة كما يلي :

1 ـ $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{x}$ 3 ـ $h(x) = (1-x)(2-\sqrt{-x})$

2 ـ $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}-2}$ 4 ـ $\ell(x) = \frac{2}{x} - \cos x$

<u>الحل ـ 10</u>

1 ـ f معرفة من أجل : $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

منه : $D_f = [0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{1}{y} + 2 = -\infty$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 1$ فإن $x-1 \overset{<}{\to} 0$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{x-1} + 2\sqrt{1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} + 2 = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $x-1 \overset{>}{\to} 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} + 2\sqrt{x} = \lim_{x \to +\infty} 2\sqrt{x} = +\infty$ لأن $\lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$

2 ـ g معرفة من أجل : $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}-2 \neq 0 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$

منه : $D_g = [0 ; 4[\cup]4 ; +\infty[$

$\lim_{x \overset{<}{\to} 4} g(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 4} \frac{4+1}{\sqrt{x}-2} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} \frac{5}{y} = -\infty$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 4$ فإن $(\sqrt{x}-2) \overset{<}{\to} 0$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} g(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} \frac{4+1}{\sqrt{x}-2} = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{5}{y} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 4$ فإن $(\sqrt{x}-2) \overset{>}{\to} 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ لأن لما $x \to +\infty$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0$

3 – h معرفة من أجل : $-x \geq 0$ أي : $x \leq 0$

منه : $D_h =]-\infty ; 0]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1-x)(2-\sqrt{-x}) = -\infty$ لأن $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} 1-x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2-\sqrt{-x} = -\infty \end{array} \right.$

4 – ℓ معرفة من أجل : $x \neq 0$ إذن : $D_\ell =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{x} - \cos x = \lim\limits_{x \to -\infty} - \cos x$ (غير معرفة) لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \ell(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{2}{x} - \cos(0) = -\infty$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \ell(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2}{x} - \cos(0) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} - \cos x = \lim\limits_{x \to +\infty} - \cos x$ (غير معرفة)

التمرين – 11

نفس أسئلة التمرين 9 بالنسبة للدوال المعرفة كما يلي :

1 – $f(x) = \sin 2x + x$　　**3 – $h(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$**

2 – $g(x) = \sqrt{x} - 1 - 2x$　　**4 – $\ell(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$**

الحل – 11

1 – f معرفة على $]-\infty ; +\infty[$ لأنها مجموع دالتين معرفتين على IR .

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ لأن $-1 \leq \sin 2x \leq +1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ لأن $-1 \leq \sin 2x \leq 1$

2 – g معرفة من أجل $x \geq 0$ إذن $D_g = [0 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} - 2\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} -2x = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

3 – h معرفة من أجل $\left\{ \begin{array}{l} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{array} \right.$ أي : $x \geq 1$

منه $D_h = [1 ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right) \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$ (خاصية الضرب في المرافق)

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+1-(x-1)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = +\infty$ لأن $= 0$

4 ـ ℓ معرفة من أجل $x^2 - x + 1 \geq 0$

لندرس إشارة كثير الحدود $x^2 - x + 1$ كما يلي :

x	$-\infty$	$+\infty$
$x^2 - x + 1$	+	

إذن : $\Delta = 1 - 4 < 0$

منه : من أجل كل x من IR فإن $x^2 - x + 1 > 0$ إذن : $D_\ell =]-\infty ; +\infty[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} - x = +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - x\right) \times \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$ الضرب في المرافق

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)}$$

$= \frac{-1}{1+1}$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$= -1/2$

التمرين ـ 12

أحسب النهايات التالية :

1 ـ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \sqrt{\frac{3x + 4}{x - 3}}$ 3 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1}$

2 ـ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \sqrt{\frac{3 - 6x}{1 - x}}$ 4 ـ $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x^3 + x - 3}$

الحل ـ 12

1 ـ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \sqrt{\frac{3x + 4}{x - 3}} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 3} \sqrt{\frac{3(3) + 4}{x - 3}} = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \sqrt{\frac{13}{y}} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 3$ فإن $(x - 3) \overset{>}{\to} 0$

2 ـ $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \sqrt{\frac{3 - 6x}{1 - x}} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} \sqrt{\frac{3 - 6(1)}{1 - x}} = \lim\limits_{y \overset{<}{\to} 0} \sqrt{\frac{-3}{y}} = +\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} 1$ فإن $(1 - x) \overset{<}{\to} 0$

3 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$

4 ـ $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{-x^3 + x - 3} = +\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to -\infty} -x^3 + x - 3 = +\infty$

التمرين ـــ 13

f دالة معرفة بـ $f(x) = \dfrac{-3}{\sqrt{4-x^2}}$

عين D_f مجموعة تعريف الدالة f ثم أحسب النهايات على أطراف مجموعة التعريف :

الحـــل ـــ 13

f معرفة من أجل $4-x^2>0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$4-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن : $D_f =]-2\,;2[$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} -2} \dfrac{-3}{\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \dfrac{-3}{\sqrt{y}} = -\infty$ لأن لما $x \overset{>}{\to} -2$ فإن $4-x^2 \overset{>}{\to} 0$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} \dfrac{-3}{\sqrt{4-x^2}} = \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \dfrac{-3}{\sqrt{y}} = -\infty$ لأن لما $x \overset{<}{\to} 2$ فإن $4-x^2 \overset{>}{\to} 0$

التمرين ـــ 14

أحسب النهايات التالية :

1 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{x+4}{x^2-3}\right)$ 3 ـ $\lim\limits_{x \to -1} \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right) + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

2 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x - 1}{2x}\right)$ 4 ـ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\pi \sin x}{x}$

الحـــل ـــ 14

1 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{x+4}{x^2-3}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{x}{x^2}\right)$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+4}{x^2-3} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \cos(0)$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2} = 0$

$= 1$

2 ـ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x - 1}{2x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x}{2x}\right)$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pi x - 1}{2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pi x}{2x}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \cos(\pi/2)$

$= 0$

3 ـ $\lim\limits_{x \to -1} \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}x\right) + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x \to -1} \sin\left(-\dfrac{\pi}{2} \times -1\right) + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$= \lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{y}$ لأن لما $x \to -1$ فإن $(x+1)^2 \overset{>}{\to} 0$

$= +\infty$ لأن $\sin\dfrac{\pi}{2} = 1$ و $\lim\limits_{y \overset{>}{\to} 0} \dfrac{1}{y} = +\infty$.

4 ـ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\pi \sin x}{x} = ?$

لنعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ $f(x) = \sin x$

f قابلة للإشتقاق على IR و $f'(x) = \cos x$ منه $f'(0) = \cos(0) = 1$

و حسب تعريف العدد المشتق عند 0 فإن : $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

إذن : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

منه : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\pi \sin x}{x} = \pi$ و هو المطلوب

التمرين ـ 15

برهن أن من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x > -1$ فإن : $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$

إستنتج نهاية الدالة $f : x \mapsto \frac{\cos x}{x+1}$ **عند** $+\infty$

الحـل ـ 15

لدينا : $x > -1$ إذن : $x + 1 > 0$ أي $\frac{1}{x+1} > 0$

من جهة أخرى لدينا : $-1 \leq \cos x \leq 1$ إذن : بضرب أطراف هذه المتباينة في نفس العدد الموجب $\frac{1}{x+1}$ نحصل على :

$$-1 \times \frac{1}{x+1} \leq \cos x \times \frac{1}{x+1} \leq 1 \times \frac{1}{x+1}$$

أي $\frac{-1}{x+1} \leq \frac{\cos x}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$ و هو المطلوب .

نتيجة : بما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$ فإن حسب نظرية الحصر $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x+1} = 0$ و هو المطلوب .

التمرين ـ 16

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ فإن $\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$

هل f تقبل نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ـ 16

لدينا : $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+7}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x}{x} + \frac{\cos x}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} 3 + \frac{\cos x}{x} = 3$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

نتيجة :

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \cos x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x+7}{x-1} = 3$ و $\frac{3x + \cos x}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x+7}{x-1}$

فإن حسب مبرهنة الحصر f تقبل نهاية عند $+\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

التمرين ـ 17

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2+1}$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ـ 17

من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 0$: $|f(x) - 3| \leq \frac{1}{x^2+1}$

أي : $\frac{-1}{x^2+1} \leq f(x) - 3 \leq \frac{1}{x^2+1}$ لأن $\frac{1}{x^2+1} > 0$

منه : $3 - \frac{1}{x^2+1} \leq f(x) \leq 3 + \frac{1}{x^2+1}$

بما أن : $\lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x^2+1}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2+1}\right) = 3$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$

فإن حسب مبرهنة الحصر الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ و $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$

التمرين ـ 18

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f(x) \leq -2x^3$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ـ 18

بما أن $\lim_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty$ و $f(x) \leq -2x^3$ من أجل $x > 0$

فإن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (حسب مبرهنة الدرس)

التمرين ــ 19

f دالة عددية حيث من أجل كل عدد حقيقي $x > 0$: $f(x) \geq \frac{1}{4}x^4 + x$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ــ 19

بما أن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4}x^4 + x = +\infty$ و $f(x) \geq \frac{1}{4}x^4 + x$ من أجل $x > 0$

فإن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (حسب مبرهنة الدرس)

التمرين ــ 20

1 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x يكون $1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$

2 ــ هل الدالة $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{3 + 2\cos x}$ تقبل نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ــ 20

1 ــ من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \leq \cos x \leq 1$

منه : $-2 \leq 2\cos x \leq 2$

منه : $3 - 2 \leq 3 + 2\cos x \leq 3 + 2$

منه : $1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$ و هو المطلوب

2 ــ حسب السؤال الأول فإن : $1 \leq 3 + 2\cos x \leq 5$

منه : $1/5 \leq \dfrac{1}{3 + 2\cos x} \leq 1/1$ .... (1)

نضع $\alpha = \dfrac{1}{3 + 2\cos x}$ إذن : $1/5 \leq \alpha \leq 1$ أي $\alpha > 0$

منه : الدالة f معرفة بـ $f(x) = \alpha(x - 1)$

أي $f(x) = \alpha x - \alpha$

إذن : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \alpha x = +\infty$ لأن $\alpha > 0$

التمرين ــ 21

1 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x : $x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$

2 ــ هل تقبل الدالة $f : x \mapsto x^2 - 3\sin x$ نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ــ 21

1 ــ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\sin x \leq 1$

منه : $-3\sin x \geq -3$

منه : $x^2 - 3\sin x \geq x^2 - 3$ و هو المطلوب

2 ــ بما أن $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 3 = +\infty$ و $f(x) \geq x^2 - 3$ من أجل $x > 0$ فإن

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (حسب مبرهنة الدرس)

التمرين ــ 22

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = x^2 + 2x\sin x$

هل تقبل الدالة f نهاية عند $+\infty$ ؟ و عند $-\infty$ ؟

الحـل ــ 22

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 + 2x\sin x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x(x + 2\sin x)$$

$= +\infty$ لأن $\begin{cases} \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} x + 2\sin x = +\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 + 2x \sin x$$
$$= \lim_{x \to -\infty} x(x + 2\sin x)$$

لأن $= +\infty$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x + 2\sin x = -\infty\end{array}\right\}$

لاحظ أن $-2 \le 2\sin x \le 2$ إذن يمكن وضع $\alpha = 2\sin x$ حيث $-2 < \alpha < 2$

منه : $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} x + 2\sin x = \lim\limits_{x \to +\infty} x + \alpha = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x + 2\sin x = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \alpha = -\infty\end{array}\right\}$

التمرين ــ 23

f دالة عددية معرفة على المجال $]-1/2\,;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{x + \sin x}{2x + 1}$

1 ــ بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x > -1/2$: $\dfrac{x-1}{2x+1} < f(x) < \dfrac{x+1}{2x+1}$

2 ــ هل الدالة f تقبل نهاية عند $+\infty$ ؟

الحـل ــ 23

1 ــ $x > -1/2$ إذن : $2x > -1$ أي $2x + 1 > 0$ منه $\dfrac{1}{2x+1} > 0$ .... (1)

من جهة أخرى : من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-1 \le \sin x \le 1$

إذن : $x - 1 \le x + \sin x \le x + 1$ .... (2)

بضرب أطراف المتباينة (2) في العدد الموجب $\dfrac{1}{2x+1}$ نحصل على :

$\dfrac{x+1}{2x+1} \ge \dfrac{x + \sin x}{2x+1} \ge \dfrac{x-1}{2x+1}$ من أجل $x > -1/2$ و هو المطلوب .

أي $\dfrac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \dfrac{x+1}{2x+1}$

2 ــ بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{2x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{2x+1} = \dfrac{1}{2}$ و $\dfrac{x-1}{2x+1} \le f(x) \le \dfrac{x+1}{2x+1}$

فإن حسب مبرهنة الحصر : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1/2$

التمرين ــ 24

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-2\,;4[$ بـ $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & : x \in [-2\,;1[\\ x - 1 & : x \in [1\,;4[\end{cases}$

1 ــ هل تقبل الدالة f نهاية عند 1 ؟

2 ــ هل الدالة f مستمرة على المجال $]-2\,;4[$ ؟ علل .

3 ــ أذكر مجالا I تكون الدالة f مستمرة عليه .

الحـل ــ 24

1 ــ لما $x \in [-2\,;1[$ فإن $f(x) = x^2 + x$ إذن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} x^2 + x = 1^2 + 1 = 2$

لما $x \in [1\,;+\infty[$ فإن $f(x) = x - 1$ إذن : $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} x - 1 = 1 - 1 = 0$

إذن : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) \ne \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ منه الدالة f لا تقبل نهاية عند 1

2 ــ الدالة f ليست مستمرة على المجال $]-2\,;4[$ لأن يوجد عنصر و هو 1 من المجال $]-2\,;4[$ حيث الدالة f ليست مستمرة عند 1 (الدالة لا تقبل نهاية عند 1)

3 ــ على المجال $[2\,;3]$ الدالة f معرفة بـ $f(x) = x - 1$ و هي دالة كثير حدود .

إذن : فهي مستمرة على IR و خاصة على $[2\,;3]$ و هو المجال المطلوب (مثلا) .

التمرين ـ 25

لتكن f دالة معرفة على IR كمايلي :
$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & : x\le 2 \\ x^2+x-5 & : x>2 \end{cases}$$

1 ـ أدرس إستمرارية الدالة f عند 2 .

2 ـ هل الدالة f مستمرة على IR ؟ علل .

الحل ـ 25

1 ـ من أجل $x\in]-\infty ; 2]$ فإن $f(x)=x^2-2x+1$ إذن :
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x)=\lim_{x \overset{<}{\to} 2} x^2-2x+1 = (2)^2-2(2)+1 = 1$$

من أجل $x\in]2 ; +\infty[$ فإن $f(x)=x^2+x-5$ إذن :
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} 2} x^2+x-5 = (2)^2+2-5 = 1$$

بما أن $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)=1$ فإن $\lim_{x\to 2} f(x)=2$

من جهة أخرى لدينا الدالة f معرفة عند 2 بالعبارة $f(x)=x^2-2x+1$

منه : $f(2)=(2)^2-2(2)+1=1$

نتيجة : $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=1$ إذن : الدالة f مستمرة عند 2

2 ـ الدالة f مستمرة على IR لأنها مستمرة عند 2 و مستمرة على كل من المجالين $]-\infty ; 2]$ و $]2 ; +\infty[$ لأنها عبارة عن دالة كثير حدود معرفة على كل من المجالين على حدا .

التمرين ـ 26

أدرس إستمرارية الدالة f المعرفة على IR بـ :
$$f(x)=\begin{cases} -x^2+x+2 & : x\le 1 \\ \frac{1}{2}x+1 & : x>1 \end{cases}$$

الحل ـ 26

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)=\lim_{x \overset{<}{\to} 1} -x^2+x+2=-1+1+2=2$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)=\lim_{x \overset{>}{\to} 1} \frac{1}{2}x+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$$

نتيجة : $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x)\neq \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x)$ إذن : f ليست مستمرة عند 1

إذن : فهي ليست مستمرة على IR .

و لكن f مستمرة على $]-\infty ; 1]$ و على المجال $]1 ; +\infty[$ كل على حدا .

التمرين ـ 27

f دالة عددية معرفة كمايلي :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1} & : x\neq 1 \\ f(1)=3 \end{cases}$$

1 ـ أدرس إستمرارية f عند 1 .

2 ـ هل الدالة f مستمرة على IR ؟

الحل ـ 27

1 ـ من أجل $x\in]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ فإن $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$ بإجراء القسمة الإقليدية نحصل على :

x^3-1	$x-1$
x^3-x^2	x^2+x+1
x^2-1	
x^2-x	
$x-1$	
$x-1$	
0	

من أجل $]1 ; +\infty[$ $x \in]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ فإن $f(x) = x^2 + x + 1$

إذن :
$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} x^2 + x + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} x^2 + x + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

بما أن : $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = 3$ فإن $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$

نتيجة : بما أن $\lim_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$ فإن f مستمرة عند 1

2 ــ بما أن f دالة ناطقة على المجال $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ فهي مستمرة على هذا المجال و لكن f مستمرة أيضا عند 1 إذن f مستمرة عند كل عنصر من IR أي f مستمرة على IR .

التمرين ــ28

أدرس إستمرارية الدالة g المعرفة على $R - \{1\}$ بـــ $g(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$

الحــل ــ28

f دالة ناطقة إذن معرفة و مستمرة على مجال تعريفها أي f مستمرة على المجال $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

التمرين ــ 29

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = (x^2 - x)\sin x$

لماذا الدالة f مستمرة على IR .

الحــل ــ 29

لنعرف الدالتين u و v كمايلي : $u : R \to R$, $x \mapsto \sin x$ و $v : R \to R$, $x \mapsto x^2 - x$

الدالة u معرفة و مستمرة على IR

الدالة v معرفة و مستمرة على IR

إذن جداء الدالتين u و v هو دالة مستمرة على IR أي :

الدالة المعرفة بـــ $x \mapsto (x^2 - x)\sin x$ معرفة و مستمرة على IR

و منه f مستمرة على IR .

التمرين ــ 30

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$. أدرس إستمرارية f على IR .

الحــل ــ 30

لدينا f هو جداء الدالتين المستمرتين على IR و المعرفتين بـــ : $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2}$

إذن : f هي دالة مستمرة على IR .

التمرين ــ 31

نعتبر الدالة f المعرفة على $[-2 ; 1[$ كما يلي : $f(x) = x(x + E(x))$

حيث الدالة $x \mapsto E(x)$ هي الدالة جزء الصحيح للعدد x .

1 ــ عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية : $[-2 ; -1[$ ؛ $[-1 ; 0[$ ؛ $[0 ; 1[$

2 ــ هل الدالة f مستمرة على $[-2 ; -1[$ ؛ $[-2 ; 0[$ ؛ $[-2 ; 1[$

الحــل ــ 31

1 ــ نعلم أن الدالة جزء صحيح معرفة كما يلي :

$$E(x) = \begin{cases} -2 & : x \in [-2 ; -1[\\ -1 & : x \in [-1 ; 0[\\ 0 & : x \in [0 ; 1[\end{cases}$$

إذن الدالة f معرفة كمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} x(x - 2) & : x \in [-2 ; -1[\\ x(x - 1) & : x \in [-1 ; 0[\\ x(x + 0) & : x \in [0 ; 1[\end{cases}$$

أي

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & : x \in [-2 ; -1[\\ x^2 - x & : x \in [-1 ; 0[\\ x^2 & : x \in [0 ; 1[\end{cases}$$

2 ـ الدالة f معرفة على المجال $]-2\,;-1[$ بـ $f(x) = x^2 - 2x$ إذن هي دالة كثير حدود منه : f مستمرة على $]-2\,;-1[$

الدالة f معرفة على المجال $]-2\,;0[$ كمايلي :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & : x \in]-2\,;-1[\\ x^2 - x & : x \in [-1\,;0[\end{cases}$$

إذن : f مستمرة على $]-2\,;-1[$ و f مستمرة على $]-1\,;0[$

لكن هل f مستمرة عند 1 - ؟

لدينا
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} x^2 - 2x = (-1)^2 - 2(-1) = 3$$
$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} x^2 - x = (-1)^2 - (-1) = 2$$

إذن : الدالة f لا تقبل نهاية عند 1 - إذن : f ليست مستمرة عند 1-

نتيجة : f ليست مستمرة على $]-2\,;0[$ لأن f ليست مستمرة عند -1.

بما أن الدالة f ليست مستمرة عند 1 - و 1 - عنصر من المجال $]-2\,;1[$ فإن f ليست مستمرة على المجال $]-2\,;1[$

التمرين ــ 32

باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة برهن أن المعادلة $x^3 - 4x = -2$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[-3\,;-2]$

الحـل ــ 32

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[-3\,;-2]$ بـ $f(x) = x^3 - 4x$

لدينا : $f(-3) = (-3)^3 - 4(-3) = -15$ و $f(-2) = (-2)^3 - 4(-2) = 0$

بما أن f مستمرة على المجال $[-3\,;-2]$ فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = k$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-3\,;-2]$ من أجل كل عدد حقيقي k حيث $k \in [f(-3)\,;f(-2)]$ أي $k \in [-15\,;0]$

بما أن $k = -2$ عنصر من المجال $[-15\,;0]$ فإن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-3\,;-2]$

أي المعادلة $x^3 - 4x = -2$ تقبل على الأقل حلا على المجال $[-3\,;-2]$ و هو المطلوب

التمرين ــ 33

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0\,;2]$ بـ
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & : 0 \le x < 1 \\ -2x + 3 & : 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

1 ــ هل يمكن تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة لإثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلول في المجال $[0\,;2]$ ؟

2 ــ تحقق أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا واحدا في المجال $[0\,;2]$

الحـل ــ 33

1 ــ f معرفة على المجال $[0\,;1[$ بـ $f(x) = 2x + 1$ (كثير حدود) إذن هي مستمرة على $[0\,;1[$

f معرفة على المجال $[1\,;2]$ بـ $f(x) = -2x + 3$ (كثير حدود) إذن هي مستمرة على $[1\,;2]$

لكن هل f مستمرة عند 1 ؟

لدينا
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} 2x + 1 = 2(1) + 1 = 3$$
$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} -2x + 3 = -2(1) + 3 = 1$$

إذن : الدالة f لا تقبل نهاية عند 1 منه f ليست مستمرة عند 1

نتيجة : f ليست مستمرة عند 1 و 1 عنصر من المجال $[0\,;2]$ إذن f ليست مستمرة على المجال $[0\,;2]$.

إذن : f لا تحقق شرط تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة على المجال $[0\,;2]$ و عليه لا يمكن تطبيق هذه المبرهنة

2 ــ حل المعادلة $f(x) = 0$

لدينا :
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 0 & : x \in [0\,;1[\\ \text{أو} & \\ -2x + 3 = 0 & : x \in [1\,;2] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/2 & \text{مرفوض لا ينتمي إلى } [0\,;1[\\ \text{أو} & \\ x = 3/2 & \text{مقبول لأن } 3/2 \in [1\,;2[\end{cases}$$

نتيجة : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا هو $3/2$ على المجال $[0\,;2]$

التمرين ـــ 34

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = 3x^3 - 2x - \frac{1}{4}$

1 ـــ أحسب $f(-1)$ ؛ $f(-1/2)$ ؛ $f(0)$ ؛ $f(1)$

2 ـــ إستنتج أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول في المجال $[-1 ; 1]$

الحـل ـــ 34

1 ـــ

$$f(1) = 3(1) - 2(1) - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$f(0) = 0 - 0 - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = 3(-\frac{1}{2})^3 - 2(-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4} = \frac{-3}{8} + 1 - \frac{1}{4} = \frac{-3+8-2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(-1) = 3(-1)^3 - 2(-1) - \frac{1}{4} = -3 + 2 - \frac{1}{4} = -\frac{5}{4}$$

2 ـــ الدالة f كثير حدود إذن هي مستمرة على IR و خاصة فهي مستمرة على كل من المجالات $[-1 ; -1/2]$ ؛ $[-1/2 ; 0]$ ؛ $[0 ; 1]$ كل على حدا .

و من جهة أخرى : $f(-1) \times f(-1/2) < 0$

و $f(-1/2) \times f(0) < 0$

و $f(0) \times f(1) < 0$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في كل مجال من المجالات $[-1 ; -1/2]$ ؛ $[-1/2 ; 0]$ و $[0 ; 1]$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة و عليه فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاث حلول على المجال $[-1 ; 1]$

التمرين ـــ 35

f دالة معرفة على المجال $[-3 ; 6]$ بـــ : $f(x) = x^3 - 12x$

1 ـــ أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

2 ـــ ماهو عدد حلول المعادلة $f(x) = 30$

الحـل ـــ35

1 ـــ f معرفة و قابلة للإشتقاق على $[-3 ; 6]$ و $f'(x) = 3x^2 - 12$

إشارة $f'(x)$: $3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$

x	-3		-2		2		6
$3(x^2-4)$		+	0	−	0	+	

منه : جدول إشارة $f'(x)$ على المجال $[-3 ; 6]$ كما يلي :

x	-3		-2		2		6
f'(x)		+	0	−	0	+	

إذن جدول تغيرات الدالة f على $[-3 ; 6]$:

x	-3		-2		2		6
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	9	↗	16	↘	-16	↗	144

(30 مشار إليها بين -16 و 144)

$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) = -27 + 36 = 9$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = -8 + 24 = 16$$

$$f(2) = (2)^3 - 12(2) = 8 - 24 = -16$$

$$f(6) = (6)^3 - 12(6) = 36(6-2) = 36 \times 4 = 144$$

2 ـــ حسب جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-3 ; 6]$ فإن الدالة f تأخذ القيمة 30 من أجل عدد حقيقي وحيد k حيث $2 < k < 6$ لأن من أجل $x \in [2 ; 6]$ فإن $f(x) \in [-16 ; 144]$ و العدد 30 عنصر من المجال $[-16 ; 144]$

منه المعادلة $f(x) = 30$ تقبل حلا وحيدا .

التمرين ــ 36
بين أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرا حقيقيا

الحـل ــ 36

لتكن f دالة كثير حدود حيث $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$

حيث $a_0 ; a_1 ; \ldots\ldots\ldots ; a_{n-1} ; a_n$ معاملات حقيقية و n عدد طبيعي فردي حيث $a_n \neq 0$

نعلم أن f مستمرة على IR لأنها دالة كثير حدود .

و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a_n x^n$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} a_n x^n$

إذن نميز حالتين كما يلي :

	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
$a_n > 0$	$-\infty$	$+\infty$
$a_n < 0$	$+\infty$	$-\infty$

نتيجة :

إذا كان $a_n < 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$

إذا كان $a_n > 0$ فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$

إذن : من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم a_n فإن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \times \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) < 0$ و f مستمرة على IR

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا حقيقيا . و هو المطلوب

التمرين ــ37

f دالة مستمرة على المجال $]-3 ; +\infty[$ و جدول تغيراتها كما يلي :

بين أن المنحنى C_f الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما

الحـل ــ 37

f مستمرة على $]-3 ; +\infty[$ إذن f مستمرة على $]-3 ; 0]$ و مستمرة أيضا على $[0 ; 2]$

من جهة أخرى و حسب جدول التغيرات لدينا :

لما $x \in]-3 ; 0]$ فإن $f(x) \in [-2 ; +\infty[$

لما $x \in [0 ; 2]$ فإن $f(x) \in [-2 ; 4[$

لكن $0 \in [-2 ; +\infty[$ و $0 \in [-2 ; 4[$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن يوجد $x_0 \in]-3 ; 0]$ يحقق $f(x_0) = 0$ و يوجد $x_1 \in [0 ; 2]$ يحقق $f(x_1) = 0$

إذن النقط ذات الإحداثيات $A(x_0 ; 0)$ و $B(x_1 ; 0)$ تنتمي إلى المنحنى C_f و ترتيبها معدوم إذن فهي تنتمي إلى محور الفواصل.

منه C_f يقطع محور الفواصل في نقطتين متمايزتين A و B فواصلهما على الترتيب $-3 \leq x_0 \leq 0$ و $0 \leq x_1 \leq 2$

التمرين ــ 38

إليك جدول تغيرات دالة f معرفة على IR كما يلي :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{13}{6}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	$+\infty$

برر لماذا المعادلة $f(x) + 2 = 0$ تقبل ثلاثة حلول على الأقل في IR

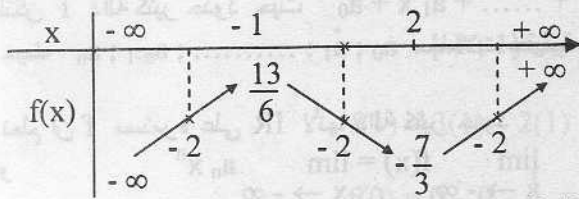
الحـل ـــ 38

المعادلة $f(x) + 2 = 0$ تكافئ $f(x) = -2$ و حسب جدول تغيرات الدالة f على IR لدينا :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f(x)	$-\infty$	↗	$\frac{13}{6}$	↘	$-\frac{7}{3}$	↗	$+\infty$

لما $x \in]-\infty ; -1]$ فإن $f(x) \in]-\infty ; 13/6]$

لما $x \in [-1 ; 2]$ فإن $f(x) \in [-7/3 ; 13/6]$

لما $x \in [2 ; +\infty[$ فإن $f(x) \in [-7/3 ; +\infty[$

بما أن f مستمرة على IR و العدد 2 - هو عنصر من المجالات $]-\infty ; 13/6]$ ؛ $[-7/3 ; 13/6]$ و $[-7/3 ; +\infty[$ فإن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل حلا على الأقل في كل مجال من المجالات $]-\infty ; -1]$ ؛ $[-1 ; 2]$ ؛ $[2 ; +\infty[$ أي المعادلة $f(x) = -2$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في IR منه المعادلة $f(x) + 2 = 0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في IR

التمرين ـــ 39

f دالة معرفة على المجال $[-1 ; 2]$ بـ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

1 ـــ أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

2 ـــ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $[1 ; 2]$

الحـل ـــ 39

1 ـــ $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f على $[-1 ; 2]$

x	-1		0		1		2
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	-6	↗	-1	↘	-2	↗	3

$f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 1 = -2 - 3 - 1 = -6$

$f(0) = -1$

$f(1) = 2(1) - 3(1) - 1 = -2$

$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - 1 = 16 - 12 - 1 = 3$

2 ـــ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج أنه لما $x \in [1 ; 2]$ فإن $f(x) \in [-2 ; 3]$

بما أن العدد 0 عنصر من المجال $[-2 ; 3]$ و f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $[1 ; 2]$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 2$

التمرين ـــ 40

f دالة معرفة على المجال $[0 ; \pi]$ بـ $f(x) = \cos^3 x - 3\cos x + 2$

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; \pi]$ حيث $f(\alpha) = \sqrt{2}$

الحـل ـــ 40

لندرس تغيرات الدالة f على $[0 ; \pi]$

f قابلة للاشتقاق على $[0 ; \pi]$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 3(-\sin x)(\cos^2 x) - 3(-\sin x)$$
$$= -3\sin x(\cos^2 x - 1)$$
$$= -3\sin x(-\sin^2 x)$$
$$= 3\sin x \times \sin^2 x$$

إذن : إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sin x$ أي موجب تماما لأن $\sin x$ موجب على المجال $]0 ; \pi[$

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	0		π
f '(x)		+	
f(x)	0	$\sqrt{2}$ ↗	4

$f(0) = \cos^3(0) - 3\cos(0) + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$

$f(\pi) = \cos^3(\pi) - 3\cos(\pi) + 2 = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = -1 + 5 = 4$

نتيجة :
- f مستمرة و متزايدة تماما على $[0 ; \pi]$
- لما $x \in [0 ; \pi]$ فإن $f(x) \in [0 ; 4]$
- العدد $\sqrt{2}$ عنصر من المجال $[0 ; 4]$

إذن المعادلة $f(x) = \sqrt{2}$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\alpha \in]0 ; \pi[$ أي يوجد $\alpha \in]0 ; \pi[$ حيث $f(\alpha) = \sqrt{2}$

التمرين – 41

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

1 – أدرس تغيرات الدالة f .

2 – بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على كل من المجالات $[-1 ; 0]$ ؛ $[0 ; 1]$ ؛ $[2 ; 3]$

الحل – 41

1 – f معرفة و قابلة للإشتقاق على IR .

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x^3 = -\infty$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(2 - x)$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	0	−	

منه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	0	−	
f(x)	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

$f(0) = -1$

$f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 - 1 = -8 + 12 - 1 = 3$

لنحسب $f(-1)$ و $f(1)$ و $f(3)$ كما يلي :

$f(-1) = -(-1)^3 + 3(-1)^2 - 1 = 1 + 3 - 1 = 3$

$f(1) = -(1) + 3(1) - 1 = 1$

$f(3) = -(3)^3 + 3(3)^2 - 1 = -1$

نتائج :

(1)
- f مستمرة على $[-1 ; 0]$
- $f(-1) \times f(0) < 0$
- f متناقصة تماما على $[-1 ; 0]$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $[-1 ; 0]$

(2)
- f مستمرة على $[0 ; 1]$
- $f(0) \times f(1) < 0$
- f متزايدة تماما على $[0 ; 1]$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $[0 ; 1]$

(3) $\left.\begin{array}{l} f \text{ مستمرة على } [2 ; 3] \\ f(2) \times f(3) < 0 \\ f \text{ متناقصة تماما على } [2 ; 3] \end{array}\right\}$ إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على $[2 ; 3]$

التمرين ـــ 42

f دالة معرفة على المجال $[0 ; \pi]$ بـــ $f(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x$

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من $[0 ; \pi]$ بحيث $f(\alpha) = \alpha$

الحـل ـــ 42

نعرف الدالة g على المجال $[0 ; \pi]$ بـــ $g(x) = 2 + \frac{1}{2}\sin x - x$

لندرس تغيرات الدالة g على المجال $[0 ; \pi]$:

$$g(0) = 2 + \frac{1}{2}\sin(0) - 0 = 2$$

$$g(\pi) = 2 + \frac{1}{2}\sin(\pi) - \pi = 2 - \pi$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\cos x - 1$$

إشارة $g'(x)$:

إذن : $-1 \le \cos x \le 1$ $\qquad -\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\cos x \le \frac{1}{2}$

إذن : $-\frac{1}{2} - 1 \le \frac{1}{2}\cos x - 1 \le \frac{1}{2} - 1$

أي $-3/2 \le g'(x) \le -1/2$

منه : $g'(x) < 0$

إذن : جدول تغيرات الدالة g على المجال $[0 ; \pi]$:

x	0 → π
g'(x)	–
g(x)	2 ↘ 2 – π

من جدول تغيرات الدالة g نستنتج أن :

$\left.\begin{array}{l} g \text{ مستمرة على } [0 ; \pi] \\ g(0) \times g(\pi) < 0 \\ g \text{ متناقصة تماما على } [0 ; \pi] \end{array}\right\}$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; \pi]$ حيث $g(\alpha) = 0$

أي : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; \pi]$ حيث $2 + \frac{1}{2}\sin\alpha - \alpha = 0$

أي : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; \pi]$ حيث $2 + \frac{1}{2}\sin\alpha = \alpha$

أي : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[0 ; \pi]$ حيث $f(\alpha) = \alpha$ و هو المطلوب .

التمرين ـــ 43

f دالة معرفة على $]0 ; +\infty[$ بـــ $f(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{2})^2$

1 ـــ بين أن f متناقصة تماما على المجال $D =]0 ; 2[$

لتكن g دالة معرفة على D بـــ $g(x) = f(x) - x$

2 ـــ بين أن g متناقصة تماما على D .

3 ـــ أحسب $g(0)$ و $g(2)$ ثم إستنتج أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D .

الحـل ـــ 43

1 ـــ f قابلة للاشتقاق على المجال $]0 ; 2[$ و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = 2(\sqrt{x} - \sqrt{2}) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - \sqrt{2})$$

إذن : $f'(x)$ من إشارة $\sqrt{x} - \sqrt{2}$

لكن : $0 < x < 2$ إذن : $0 < \sqrt{x} < \sqrt{2}$

منه : $0-\sqrt{2} < \sqrt{x}-\sqrt{2} < \sqrt{2}-\sqrt{2}$

أي : $-\sqrt{2} < \sqrt{x}-\sqrt{2} < 0$

أي : $f'(x) < 0$

إذن : f متناقصة تماما على المجال $]0\,;2[$

2 ــ لدينا : f متناقصة تماما على D حسب السؤال (1)

و الدالة $x \mapsto -x$ متناقصة تماما على المجال D

إذن : الدالة g متناقصة تماما على المجال D لأنها مجموع دالتين متناقصتين .

3 ــ $g(0) = (\sqrt{0}-\sqrt{2})^2 - 0 = 2$

$g(2) = (\sqrt{2}-\sqrt{2})^2 - 2 = -2$

نتيجة : g مستمرة على $[0\,;2]$ ، $g(0) \times g(2) < 0$ ، g متناقصة تماما على $]0\,;2[$

إذن : المعادلة $g(x) = 0$ أي $f(x) - x = 0$ أي $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال D .

التمرين ــ 44

نعتبر الدالتين $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ و $g : x \mapsto -x^3$

بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين للدالتين f و g على الترتيب يتقطعان في نقطة وحيدة فاصلتها x_0

حيث $-7/8 < x_0 < -3/4$

الحـل ــ 44

إذا وجدت نقطة تقاطع بين (C_f) و (C_g) فإن فاصلتها x تحقق المعادلة $f(x) = g(x)$ أي $f(x) - g(x) = 0$

لنعرف الدالة h كمايلي : $h : x \mapsto f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} + x^3$

لندرس تغيرات الدالة h على IR :

h معرفة على $[-1\,;+\infty[$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$$

h قابلة للإشتقاق على $]-1\,;+\infty[$ و دالتها المشتقة كما يلي :

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 3x^2$$

لدينا : من أجل كل x من $]-1\,;+\infty[$ فإن $3x^2 \geq 0$ و $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$

إذن : $\frac{1}{\sqrt{x+1}} + 3x^2 > 0$ أي $h'(x) > 0$

أي h متزايدة تماما على $]-1\,;+\infty[$

منه جدول تغيرات الدالة h :

x	-1 $+\infty$
h'(x)	+
h(x)	-1 ↗ $+\infty$

$h(-1) = \sqrt{-1+1} + (-1)^3 = -1$

من جدول تغيرات الدالة h نستنتج أن لما $x \in [-1\,;+\infty[$ فإن $h(x) \in [-1\,;+\infty[$

بما أن العدد 0 عنصر من المجال $[-1\,;+\infty[$ و الدالة h مستمرة على المجال $[-1\,;+\infty[$ فإن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل على المجال $[-1\,;+\infty[$ و بما أن h متزايدة تماما فإن هذا الحل وحيد .

من جهة أخرى :

$$h\left(\frac{-7}{8}\right) = \sqrt{\frac{-7}{8}+1} + \left(\frac{-7}{8}\right)^3 = \sqrt{\frac{1}{8}} - \left(\frac{7}{8}\right)^3 < 0$$

$$h\left(\frac{-3}{4}\right) = \sqrt{\frac{-3}{4}+1} + \left(\frac{-3}{4}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{27}{64} = \frac{32-27}{64} = \frac{5}{64}$$

إذن h مستمرة على $[-7/8 ; -3/4]$ و $h(-7/8) \times h(-3/4) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا على المجال $[-7/8 ; -3/4]$

أي يوجد $\alpha \in [-7/8 ; -3/4]$ حيث $h(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = g(\alpha)$

منه النقطة ذات الفاصلة α مشتركة بين المنحنين (C_f) و (C_g) و هي وحيدة .

التمرين – 45

f دالة عددية معرفة على IR بـ $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+d}$ حيث $a ; b ; c ; d$ أعداد حقيقية. نسمي (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم .

عين الأعداد $a ; b ; c ; d$ التي تحقق الشروط التالية في آن واحد :

- ✓ **المنحنى (C) يشمل النقطة $A(0 ; 4)$**
- ✓ **المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $+\infty$ و $-\infty$ معادلته $y = 2x + 3$**
- ✓ **المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x = 1$**

الحـل – 45

تكون النقطة $A(0 ; 4)$ تنتمي إلى المنحنى (C) إذا وفقط إذا كان

$f(0) = 4$ أي : $a(0) + b + \frac{c}{0+d} = 4$

أي : $b + \frac{c}{d} = 4$ ..... (1) حيث $d \neq 0$

يكون المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ مقارب للمنحنى (C) إذا وفقط إذا كان $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$ أي $\lim\limits_{x \to 1} x + d = 0$

أي $d = -1$

يكون المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقاربا مائلا للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ إذا كان $ax + b = 2x + 3$ من أجل كل x من IR . أي $a = 2$ و $b = 3$

إذن المساواة (1) تصبح : $3 + \frac{c}{-1} = 4$ أي : $3 - c = 4$

أي : $c = -1$

خلاصة : $a = 2 ; b = 3 ; c = -1 ; d = -1$ إذن : $f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x-1}$

التمرين – 46

f دالة معرفة على $R - \{-1\}$ بـ $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$

1 – عين الأعداد الحقيقية $a ; b ; c ; d$ بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يكون $f(x) = ax + b + \dfrac{cx + d}{(x+1)^2}$

2 – إستنتج أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $+\infty$ و $-\infty$ يطلب تعيين معادلته

3 – حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ)

الحـل – 46

–1 $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{(x+1)^2}$ إذن $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 6x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

لنجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$x^3 + 3x^2 + 6x + 3$	$x^2 + 2x + 1$
$x^3 + 2x^2 + x$	$x + 1$
$x^2 + 5x + 3$	
$x^2 + 2x + 1$	
$3x + 2$	

نتيجة :

$$x^3+3x^2+6x+3=(x+1)(x^2+2x+1)+(3x+2)$$

منه : $\dfrac{x^3+3x^2+6x+3}{x^2+2x+1}=x+1+\dfrac{3x+2}{x^2+2x+1}$

أي : $f(x)=x+1+\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$ و هو المطلوب .

إذن : $a=1$; $b=1$; $c=3$; $d=2$

2 ــ لدينا :

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{(x+1)^2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^2+2x+1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2}$$

$=0$ إذن : المستقيم ذو المعادلة $y=x+1$ مقاربا مائلا للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$

3 ــ لدينا $f(x)-(x+1)=\dfrac{3x+2}{(x+1)^2}$

إذن إشارة $f(x)-(x+1)$ من نفس إشارة $3x+2$ لأن $(x+1)^2>0$

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
$3x+2$		$-$	0	$+$	

خلاصة :

x	$-\infty$		$-2/3$		$+\infty$
$f(x)-(x+1)$		$-$	0	$+$	

لما $x\in]-\infty;-2/3[$: $f(x)-(x+1)<0$ إذن : (C) تحت (Δ)

لما $x\in\{-2/3\}$: $f(x)-(x+1)=0$ إذن : (C) يقطع (Δ)

لما $x\in]-2/3;+\infty[$: $f(x)-(x+1)>0$ إذن : (C) فوق (Δ)

التمرين ــ 47

f دالة معرفة على IR بـ $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$ و (C) منحناها في معلم .

1 ــ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]$

2 ــ إستنتج وجود مستقيم مقارب مائل (Δ) للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 ــ أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

4 ــ عين العددان الحقيقيان α و β حيث $\alpha=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$; $\beta=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-\alpha x]$

5 ــ إستنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ') عند $-\infty$ يطلب معادلته .

الحـل ــ 47

1 ــ لنتحقق أن f معرفة على IR :

f معرفة إذا كان $x^2+4x+5\geq 0$

$\Delta=16-20=-4<0$ إذن : من أجل كل $x\in R$ فإن $x^2+4x+5>0$

منه : f معرفة على IR .

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+5}-(x+2)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2+4x+5} - (x-2)\right] \times \frac{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+5-(x+2)^2}{\sqrt{x^2+4x+5}+(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}$$

$$= 0$$

2 ـ حسب السؤال (1) : $\lim_{x \to +\infty} [f(x)-(x+2)] = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

3 ـ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$

4 ـ $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4x+5}}{x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$$ لأن $\sqrt{x^2} = |x|$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}{x}$$ لأن لما x يؤول إلى $-\infty$ فإن $|x| = -x$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

$= -1$ لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^2} = 0$

نتيجة : $\alpha = -1$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - \alpha x] = \lim_{x \to -\infty} f(x) + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+4x+5} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\sqrt{x^2+4x+5} + x\right] \times \frac{\sqrt{x^2+4x+5}-x}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+4x+5-x^2}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4x+5}{\sqrt{x^2+4x+5}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}-x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-x}$$

$|x| = -x \quad -\infty$ لأن في جوار $\quad = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}-x}$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(4+\frac{5}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{4+\frac{5}{x}}{-\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}+1\right)}$$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = 0$ لأن $\quad = \frac{4}{-2}$

$= -2$

نتيجة : $\beta = -2$

5 ــ لدينا : $\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = -2$

إذن : $\lim_{x \to -\infty} f(x) + x + 2 = 0$

أي : $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x - 2)] = 0$

منه : المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = -x - 2$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$

التمرين ــ 48

f و g دالتان معرفتان على الترتيب على IR و IR^+ كما يلي :

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 4x} \quad ، \quad f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$$

1 ــ أحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **ثم** $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

2 ــ أحسب $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$ **و** $\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$

ماذا تستنتج بالنسبة للسلوك التقاربي للدالتين f و g عند $+\infty$.

الحــل ــ 48

1 ــ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2} = +\infty$

2ــ $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x + 1} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \times \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2 - x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3/4}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x^2 + 4x} + \left(x + \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x - \frac{1}{4}}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{4}{x}\right)} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 - \frac{1}{4x}\right)}{x\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + x + \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(3 - \frac{1}{4x}\right)}{x\left(\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1 + \frac{1}{2x}\right)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1} + 1} \quad \text{لأن} \quad \left.\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4x} = 0 \\ &\lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0 \\ &\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$= \frac{3}{2}$$

نتيجة :

✓ عند $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] = 0$ إذن منحنى الدالة f عند $+\infty$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = x + \frac{1}{2}$ أي في جوار $+\infty$ الدالة f تسلك سلوك دالة تألفية من الشكل $f(x) = x + \frac{1}{2}$

✓ عند $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right)\right] \neq 0$ إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ ليس مقارب لمنحنى الدالة g عند $+\infty$ و للبحث عن سلوك تقاربي للدالة g عند $+\infty$ لدينا :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

أي :

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = 0$$

أي : $\lim_{x \to +\infty} g(x) - \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0$

أي : $\lim_{x \to +\infty} g(x) - (x + 2) = 0$

إذن : المستقيم ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب لمنحنى الدالة g عند $+\infty$

منه الدالة g تسلك سلوك دالة تآلفية من الشكل $g(x) = x + 2$ عند $+\infty$

التمرين ـ 49

f دالة معرفة على $[0 ; +\infty[$ بـ $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x}$

نسمي (C) منحناها البياني في مستوي منسوب إلى معلم .

1 ـ بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

2 ـ أدرس الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ)

الحـل ـ 49

ـ 1

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x + 3)] = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - (2x + 3)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)\right] \times \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}{\sqrt{x^2 + 4x} + (x + 2)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 4x - (x^2 + 4x + 4)}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2}$$

$$= 0$$

نتيجة : المستقيم ذو المعادلة $y = 2x + 3$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

2 ـ لندرس إشارة الفرق : $f(x) - (2x + 3)$ على $[0 ; +\infty[$:

$$f(x) - (2x + 3) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 4x} - (2x + 3)$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x} - x - 2$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2)$$

لنبحث عن قيم x من المجال $[0 ; +\infty[$ حتى يكون $f(x) - (2x + 3) \geq 0$

$$f(x) - (2x + 3) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} - (x + 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x} \geq (x + 2) \;....\; (1)$$

بما أن $\sqrt{x^2 + 4x} \geq 0$ و $x + 2 > 0$ لأن $x \in [0 ; +\infty[$

فإن المتباينة (1) تكافئ $(\sqrt{x^2 + 4x})^2 \geq (x + 2)^2$

تكافئ $x^2 + 4x \geq x^2 + 4x + 4$

تكافئ $0 \geq 4$ و هذا مستحيل

نتيجة : المتراجحة $f(x) - (2x + 3) \geq 0$ لا تقبل حلول على $[0 ; +\infty[$

إذن : من أجل كل x من المجال $[0 ; +\infty[$ فإن $f(x) - (2x + 3) < 0$

أي : المنحنى (C) دائما تحت المستقيم (Δ) من أجل $x \in [0 ; +\infty[$

التمرين ـ 50

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|}$

نسمي (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم .

1 ـ عين D مجموعة تعريف الدالة f

2 ـ أحسب نهايات الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$

3 ـ أحسب $\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x\right]$ و $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right]$

4 ـ إستنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيمين مقاربين مائلين (Δ) و (Δ') . يطلب تعيين معادلتيهما

5 ـ حدد وضعية (C) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ')

الحـل ـ 50

1 ـ من أجل كل $x \in R$ فإن $|x^2 - 1| \geq 0$

إذن : f معرفة على IR أي $D = R$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+	

2 ـ لنكتب f(x) دون القيمة المطلقة :

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2-1} & : x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[\\ -\frac{1}{2}x + \sqrt{1-x^2} & : x \in [-1 ; 1] \end{cases}$$

إذن :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$ لأن $|x| = x$ في جوار $+\infty$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left(-\frac{1}{2} + 1\right)$$ لأن $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$= +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2-1}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x - x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$ لأن $|x| = -x$ في جوار $-\infty$

$$= \lim_{x \to -\infty} -x\left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)$$

$$= +\infty$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

3 ـ

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) + \frac{3}{2}x\right] = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2-1} + \frac{3}{2}x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-1} + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-1} + x\right) \times \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{\sqrt{x^2-1} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2-1} - x}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} - x}$$

$$= 0$$ لأن $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-1} - x = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right] = \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}x + \sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) \times \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2-1} + x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x}$$

$$= 0$$

4 ــ نتائج :

❖ $\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right)\right] = 0$ إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -\frac{3}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $-\infty$

❖ $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \frac{1}{2}x\right] = 0$ إذن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$

5 ــ لندرس إشارة $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right)$ على IR

$$f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2-1|} + \frac{3}{2}x$$

$$= \sqrt{|x^2-1|} + x$$

منه : $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2-1|} + x \geq 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|x^2-1|} \geq -x \text{ ...... (1)}$$

إذن : نميز حالتين :

الحالة (1) $x > 0$ إذن المتراجحة (1) دائما محققة

الحالة (2) $x \leq 0$ إذن المتراجحة (1) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2-1|}\right)^2 \geq (-x)^2$

تكافئ $|x^2-1| \geq x^2$

تكافئ $\begin{cases} x^2 - 1 \geq x^2 \text{ و } x \leq -1 \\ \text{أو} \\ 1 - x^2 \geq x^2 \text{ و } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} -1 \geq 0 \text{ مستحيل و } x \leq -1 \\ \text{أو} \\ 2x^2 \leq 1 \text{ و } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$

تكافئ $x^2 \leq 1/2$ و $-1 \leq x \leq 0$

تكافئ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $-1 \leq x \leq 0$

تكافئ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0$

خلاصة : لما $x > 0$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) > 0$ إذن (C) فوق (Δ)

لما $\frac{-1}{\sqrt{2}} < x \leq 0$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) > 0$ إذن (C) فوق (Δ)

لما $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) = 0$ إذن (C) يقطع (Δ)

لما $x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \left(-\frac{3}{2}x\right) < 0$ إذن (C) تحت (Δ)

لندرس إشارة $f(x) - \frac{1}{2}x$ على IR

$$f(x) - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x + \sqrt{|x^2 - 1|} - \frac{1}{2}x$$
$$= \sqrt{|x^2 - 1|} - x$$

إذن : $f(x) - \frac{1}{2}x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2 - 1|} - x \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{|x^2 - 1|} \geq x$ ...... (1)

نميز حالتين :

الحالة (1) $x < 0$ إذن المتراجحة (1) دائما محققة

الحالة (2) $x \geq 0$ إذن المتراجحة (1) تكافئ $\left(\sqrt{|x^2 - 1|}\right)^2 \geq x^2$

تكافئ $|x^2 - 1| \geq x^2$

تكافئ $\begin{cases} x \geq 1 \text{ و } x^2 - 1 \geq x^2 \\ \text{أو} \\ 0 \leq x \leq 1 \text{ و } 1 - x^2 \geq x^2 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x \geq 1 \text{ و } -1 \geq 0 \text{ (مستحيل)} \\ \text{أو} \\ 0 \leq x \leq 1 \text{ و } x^2 \leq 1/2 \end{cases}$

تكافئ $\frac{-1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $0 \leq x \leq 1$

تكافئ $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

خلاصة : لما $x < 0$: $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$ إذن المنحنى (C) فوق المستقيم ('Δ)

لما $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$ إذن المنحنى (C) فوق المستقيم ('Δ)

لما $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \frac{1}{2}x = 0$ إذن المنحنى (C) يقطع المستقيم ('Δ)

لما $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$: $f(x) - \frac{1}{2}x < 0$ إذن المنحنى (C) تحت المستقيم ('Δ)

التمرين ـــ 51

f دالة معرفة على المجال $]-2\,;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2+1}{x+2}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم .

1 ـــ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]$

ليكن (P) المنحنى الممثل للدالة $x\mapsto x^2$ في نفس المعلم

2 ـــ إشرح لماذا المنحنيان (C) و (P) يتقاربان عندما يؤول x إلى $+\infty$

الحل ـــ 51

1 ـــ

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to+\infty} x^2=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+1}{x+2}-x^2=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x^2+1-x^2(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

2 ـــ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x^2]=0$ فإن كلما إقتربت الفاصلة x من $+\infty$ إقترب العدد f(x) من x^2 أي

نقط المنحنى (C) متقاربة من نقط المنحنى (P) و عليه يمكن القول أن المنحنيان (C) و (P) متقاربان عند $+\infty$

التمرين ـــ 52

f دالة معرفة على $]1\,;+\infty[$ بـ $f(x)=3x^2-\dfrac{2}{x-1}$

نسمي (C) منحناها في المستوي المنسوب إلى معلم .

1 ـــ أبحث عن منحنى (P) مقارب لمنحنى (C) عند $+\infty$ ثم حدد الوضعية النسبية لـ (C) و (P)

2 ـــ هل المنحنيان (C) و (P) متقاربان عند $-\infty$ ؟

الحل ـــ 52

1 ـــ بما أن :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 3x^2-\frac{2}{x}=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$

و

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(3x^2)]=\lim_{x\to+\infty}3x^2-\frac{2}{x-1}-3x^2=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x-1}=0$$

فإن المنحنى (C) يقترب من المنحنى (P) ذو المعادلة $y=3x^2$ عند $+\infty$

وضعية (P) بالنسبة لـ (C)

لندرس إشارة $f(x)-3x^2$ على IR :

$$f(x)-3x^2=\frac{-2}{x-1}=\frac{2}{1-x}$$

خلاصة : لما $x<1$: $f(x)-3x^2>0$ إذن : (C) فوق (P)

لما $x>1$: $f(x)-3x^2<0$ إذن : (C) تحت (P)

2 ـــ لدينا f معرفة على المجال]1 ; ∞-] و $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

و أيضا $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - 3x^2] = \lim_{x \to -\infty} \frac{-2}{x-1} = 0$

إذن : فعلا المنحنيان (P) و (C) متقاربان أيضا عند ∞- .

التمرين ـــ 53

f دالة معرفة على المجال *R بـــ $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$ و (C) منحناها .

أبحث عن منحنى (P) لدالة مرجعية مقارب لمنحنى (C) عند ∞ - و عند ∞ + ثم أدرس الوضعية النسبية لـــ (C) و (P)

الحـــل ـــ 53

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - \frac{1}{x}\right] = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$ (∞ يعني ∞ + أو ∞ -)

إذن : المنحنى (P) الممثل للدالة المرجعية $x \mapsto 1/x$ مقارب للمنحنى (C) عند ∞ + و ∞ -

الوضعية النسبية : $f(x) - \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+1}$ من إشارة x كما يلي :

x	∞ -	0	∞ +
$f(x) - \frac{1}{x}$	−	‖	+

خلاصة : لما $x < 0$: $f(x) - \frac{1}{x} < 0$ إذن : (C) تحت (P)

لما $x > 0$: $f(x) - \frac{1}{x} > 0$ إذن : (C) فوق (P) .

التمرين ـــ 54

f دالة معرفة على المجال]∞ + ; 0] بـــ $f(x) = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}}$ و (C) منحناها .

أبحث عن منحنى (P) لدالة مرجعية مقارب للمنحنى (C) عند ∞ + ثم حدد الوضعية النسبية لـــ (C) و (P)

الحـــل ـــ 54

بما أن :

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \sqrt{x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1 - x\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

$$= 0$$

فإن المنحنى (P) الممثل للدالة المرجعية $x \mapsto \sqrt{x}$ مقارب للمنحنى (C) عند ∞ +

الوضعية النسبية : $f(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

بما أن $x > 0$ فإن $\frac{1}{x\sqrt{x}} > 0$ أي $f(x) - \sqrt{x} > 0$

منه : المنحنى (C) فوق المنحنى (P) من أجل $x > 0$

التمرين ـــ 55

f دالة معرفة على المجال {4 ; 1-} - R بـــ $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-3x-4}$

1 ـــ أوجد الأعداد الحقيقية a ; b ; c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x من {4 ; 1-} - R

يكون : $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-4}$

2 ـــ أحسب نهايات الدالة f على حدود مجموعة تعريفها .

الحــل ــ 55

1 ــ

$$a+\frac{b}{x+1}+\frac{c}{x-4}=\frac{a(x+1)(x-4)+b(x-4)+c(x+1)}{(x+1)(x-4)}$$

$$=\frac{a\,x^2-3\,a\,x-4\,a+b\,x-4\,b+c\,x+c}{x^2-3\,x-4}$$

$$=\frac{a\,x^2+(b+c-3\,a)\,x-4\,a-4\,b+c}{x^2-3\,x-4}$$

إذن : يكون $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x-4}$ من أجل كل عدد حقيقي x من $R-\{-1\,;4\}$ إذا وفقط

إذا كان : $\begin{cases} a=1 \\ b+c-3\,a=2 \\ -4\,a-4\,b+c=0 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a=1 \\ (1)\ .....\ b+c=2+3 \\ (2)\ ....\ -4\,b+c=4 \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نحصل على : $b+c-(-4\,b+c)=5-4$

أي : $5\,b=1$

أي : $b=1/5$

منه حسب العلاقة (1) $c=5-b=5-\dfrac{1}{5}=\dfrac{24}{5}$

نتيجة : $f(x)=1+\dfrac{1/5}{x+1}+\dfrac{24/5}{x-4}$

2 ــ لدينا مجموعة تعريف الدالة f هي : $D=]-\infty\,;-1[\ \cup\ ]-1\,;4[\ \cup\ ]4\,;+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}=1$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}-1} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$
$$=\lim_{y\overset{<}{\to}0} 1+\frac{1/5}{y}+\frac{24/5}{-1-4}$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}-1} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$
$$=\lim_{y\overset{>}{\to}0} 1+\frac{1/5}{y}+\frac{24/5}{-1-4}$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}4} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}4} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$
$$=\lim_{y\overset{<}{\to}0} 1+\frac{1/5}{4+1}+\frac{24/5}{y}$$
$$=-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}4} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}4} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}$$
$$=\lim_{y\overset{>}{\to}0} 1+\frac{1/5}{4+1}+\frac{24/5}{y}$$
$$=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1/5}{x+1}+\frac{24/5}{x-4}=1$$

التمرين ـــ56

باستعمال تعريف العدد المشتق أحسب النهايات التالية :

1 ـــ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

2 ـــ $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$

3 ـــ $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$

4 ـــ $\lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3}$

5 ـــ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$

6 ـــ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

7 ـــ $\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

الحـل ـــ 56

1 ـــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 0 و عددها المشتق $f'(0)$ هو كما يلي :

تعريفا :

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

إذن :

$$f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = 1/2$$

نتيجة :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = f'(0) = 1/2$$

2 ـــ نفس الدالة f المعرفة في (1) قابلة للإشتقاق عند 3 و عددها المشتق $f'(3)$ هو :

تعريفا :

$$f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3+1}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3}$$

الدالة المشتقة :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

إذن :

$$f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3+1}} = 1/4$$

نتيجة :

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} = f'(3) = 1/4$$

3 ـــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 1 و عددها المشتق $f'(1)$ هو كما يلي:

تعريفا :

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{1+1}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1}$$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

إذن : $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

نتيجة : $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{2}}{x-1} = f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4 ـــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto x\sqrt{x+1}$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 3 و عددها المشتق $f'(3)$ هو كما يلي :

تعريفا : $f'(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 3\sqrt{3+1}}{x-3}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3}$$

الدالة المشتقة : $f'(x) = 1 \times \sqrt{x+1} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}$

منه : $f'(3) = \frac{3(3)+2}{2\sqrt{3+1}} = 11/4$

نتيجة : $\lim_{x \to 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3} = f'(3) = 11/4$

5 ـــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \sin x$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 0 و عددها المشتق $f'(0)$ هو كما يلي :

تعريفا : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

الدالة المشتقة : $f'(x) = \cos x$

إذن : $f'(0) = \cos 0 = 1$

نتيجة : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = f'(0) = 1$

6 ـــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto 1 - \cos x$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند 0 و عددها المشتق $f'(0)$ هو كما يلي :

تعريفا : $f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x) - (1 - \cos 0)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

الدالة المشتقة :
$$f'(x) = -(-\sin x) = \sin x$$
منه :
$$f'(0) = \sin(0) = 0$$

نتيجة :
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = f'(0) = 0$$

7 ــ نعرف الدالة f : $f : x \mapsto \cos x$

f معرفة و قابلة للإشتقاق عند $\pi/2$ و عددها المشتق $f'(\pi/2)$ هو كما يلي :

تعريفا :
$$f'(\pi/2) = \lim_{x \to \pi/2} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \frac{\pi}{2}}$$
$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}}$$
$$= \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

الدالة المشتقة :
$$f'(x) = -\sin x$$
إذن :
$$f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$$

نتيجة :
$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = -1$$

التمرين ــ 57

باستعمال تعريف العدد المشتق عند $\pi/3$ لكل من الدالتين **$f : x \mapsto \sin 3x$; $g : x \mapsto 2\cos x - 1$**

أحسب $\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1}$

الحـل ــ 57

لاحظ أن :
$$\lim_{x \to \pi/3} \sin 3x = \sin\left[3 \times \frac{\pi}{3}\right] = 0$$
و
$$\lim_{x \to \pi/3} 2\cos x - 1 = 2\cos\frac{\pi}{3} - 1 = 0$$
إذن : $\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1}$ هي حالة عدم التعيين

إذن لنحسب هذه النهاية باستعمال العدد المشتق للدوال f و g عند $\pi/3$ كما يلي :

تعريفا لدينا :
$$f'(\pi/3) = \lim_{x \to \pi/3} \frac{f(x) - f(\pi/3)}{x - \frac{\pi}{3}}$$
$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x - \sin 3 \times \frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$$
$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}}$$

الدالة المشتقة :
$$f'(x) = 3\cos 3x$$
إذن :
$$f'(\pi/3) = 3\cos 3 \times \frac{\pi}{3} = 3\cos \pi = -3$$

نتيجة (1) :
$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}} = f'(\pi/3) = -3$$

تعريفا لدينا :

$$g'(\pi/3) = \lim_{x \to \pi/3} \frac{g(x) - g(\pi/3)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{(2\cos x - 1) - (2\cos\frac{\pi}{3} - 1)}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$$

الدالة المشتقة :

$$g'(x) = -2\sin x$$

إذن :

$$g'(\pi/3) = -2\sin\frac{\pi}{3} = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

نتيجة (2) :

$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} = g'(\pi/3) = -\sqrt{3}$$

نرجع الآن إلى السؤال :

$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1} = \lim_{x \to \pi/3} \frac{\sin 3x}{2\cos x - 1} \times \frac{\frac{1}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{1}{x - \frac{\pi}{3}}}$$

$$= \lim_{x \to \pi/3} \frac{\frac{\sin 3x}{x - \frac{\pi}{3}}}{\frac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}}$$

حسب النتيجة (1) و النتيجة (2)

$$= \frac{f'(\pi/3)}{g'(\pi/3)}$$

$$= \frac{-3}{-\sqrt{3}}$$

$$= \sqrt{3}$$ و هو المطلوب .

ملاحظة هامة : الدالتين f و g قابلتان للإشتقاق عند $\pi/3$ لذلك هذه النتيجة صحيحة و إلا فلا يمكن حساب النهاية بهذه الطريقة

التمرين – 58

أثبت أن

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} = 2\sqrt{2}$$

الحـل – 58

لأن $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\sin x \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

لأن لما $x \overset{>}{\to} 0$: $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\sqrt{1 - \cos^2 x} \,.\, \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\sqrt{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \,.\, \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{2\sqrt{1 - \cos x} \,.\, \sqrt{1 + \cos x} \,.\, \cos x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$= \lim_{x \overset{>}{\to} 0} 2\sqrt{1 + \cos x} \,.\, \cos x$$

$$= 2\sqrt{1+\cos 0}\ .\ \cos 0$$

$$= 2\sqrt{2}$$ و هو المطلوب

التمرين ــ 59

أحسب النهايات التالية :

1 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 　　4 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 1}{2x+1}\right)$

2 ــ $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$ 　　5 ــ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1}$

3 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1+x}\right)$

الحل ــ 59

1 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y \to 0} \cos y = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

2 ــ $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to \pi} x - \pi = 0$

3 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{1+x}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sin \pi = 0$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi x + 3}{1+x} = \pi$

4 ــ $\lim\limits_{x \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 1}{2x+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sin \frac{\pi}{2} = 1$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\pi x + 1}{2x+1} = \frac{\pi}{2}$

5 ــ $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \frac{\tan x}{\tan^2 x + 1} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \frac{\tan x}{\tan x\left(\tan x + \frac{1}{\tan x}\right)}$

$$= \lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \frac{1}{\tan x + \frac{1}{\tan x}}$$

$$= \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y + \frac{1}{y}}$$ لأن $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} \pi/2} \tan x = +\infty$

$$= \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y}$$ لأن $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{1}{y} = 0$

$$= 0$$

التمرين ــ 60

أحسب $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$ علما أن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

الحل ــ 60

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{2x} \times \frac{3}{3}$$

$$= \lim\limits_{x \to 0} \frac{3}{2} \times \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)$$

$$= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$ لأن $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

التمرين ــ61

f دالة معرفة على $]-1\ ;\ +\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}}$

1 ــ بين أن إذا كان $x > 1$ فإن $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$

2 ــ إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

الحـل ـ 61

1 ـ لدينا $x > 1$ إذن : $x + x > 1 + x$ (نضيف x إلى الطرفين)

أي : $2x > x + 1$

منه : $\sqrt{2x} > \sqrt{x+1}$

أي : $\frac{1}{\sqrt{2x}} < \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

أو : $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ و هو المطلوب

2 ـ لدينا $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$ من أجل $x > 1$

بضرب هذه المتباينة في العدد الموجب $2x$ نحصل على :

$\frac{2x}{\sqrt{x+1}} > \frac{2x}{\sqrt{2x}}$ من أجل $x > 1$ أي $x >> 0$

أي $f(x) > \sqrt{2x}$ من أجل $x > 1$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} f(x) > \sqrt{2x} \text{ لما } x > 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x} = +\infty \end{array}\right\}$

إذن : حسب مبرهنة الحصر فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

التمرين ـ62

1 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $-2 \leq \sin x + \cos x \leq 2$

2 ـ إستنتج $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2}$

الحـل ـ 62

1 ـ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $-1 \leq \sin x \leq 1$ .... (1)

و : $-1 \leq \cos x \leq 1$ .... (2)

إذن : $-1 - 1 \leq \sin x + \cos x \leq 1 + 1$

أي : $-2 \leq \sin x + \cos x \leq 2$ .... (3)

2 ـ من أجل x يؤول إلى $+\infty$ فإن $\frac{1}{x^2} > 0$ إذن : نضرب أطراف المتباينة (3) في $\frac{1}{x^2}$ فنحصل على

$$\frac{-2}{x^2} \leq \frac{\sin x + \cos x}{x^2} \leq \frac{2}{x^2}$$

بما أن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ فإن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2} = 0$

التمرين ـ 63

1 ـ بين أن من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$: $1/2 \leq \frac{x}{x+1} < 1$

2 ـ إستنتج النهايتين التاليتين : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}\,(x+1)}$

الحـل ـ 63

ـ1

$$\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2x - x - 1}{2(x+1)}$$

$$= \frac{x-1}{2(x+1)}$$

بما أن $x \geq 1$ فإن $\left.\begin{matrix} x-1 \geq 0 \\ x+1>0 \end{matrix}\right\}$

منه : $\frac{x-1}{2(x+1)} \geq 0$ أي $\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \geq 0$ أي $\frac{x}{x+1} \geq \frac{1}{2}$ .... (1)

من جهة أخرى : $\frac{x}{x+1} - 1 = \frac{x-x-1}{x+1} = \frac{-1}{x+1}$

بما أن $x \geq 1$ فإن $x+1>0$ أي $\frac{-1}{x+1} < 0$ أي $\frac{x}{x+1} < 1$ .....(2)

من (1) و (2) فإن $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$

2 – لدينا $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$ إذن : $\frac{1}{2}\sqrt{x} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x+1} < \sqrt{x}$ من أجل $x>0$

لكن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\sqrt{x} = +\infty$ إذن : حسب مبرهنة الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} = +\infty$

أيضا $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$ إذن : $\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} < \frac{1}{\sqrt{x}}$ من أجل $x>0$

لكن $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ ، $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ إذن : حسب مبرهنة الحصر $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x}(x+1)} = 0$

التمرين – 64

أدرس إستمرارية الدالة f عند 0 في كل حالة ممايلي :

1 – $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$

2 – $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \times \sqrt{|x|} & : x \neq 0 \\ 2 & : x = 0 \end{cases}$

الحـل – 64

1 –

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \times \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$
$$= \frac{0}{\sqrt{0+1}+1}$$
$$= 0$$

بما أن $\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \\ f(0) = 0 \end{matrix}\right\}$

فإن $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$

أي الدالة f مستمرة عند 0 .

2 ـ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \times \sqrt{|x|}$$

نميز حالتين :

الأولى : $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x}{x}\sqrt{x} = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{x} = 0$

الثانية : $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-x}{x}\sqrt{-x} = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} -\sqrt{-x} = 0$

منه : $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

لكن $f(0) = 2$

أي $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

منه : الدالة f ليست مستمرة عند 0 .

التمرين ـــ 65

f دالة معرفة على IR بـــ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + 2 - \sqrt{4 + x^2}}{x} & : x \neq 0 \\ \alpha & : x = 0 \end{cases}$$

عين قيمة العدد الحقيقي α حتى تكون الدالة f مستمرة عند 0 .

الحـــل ـــ 65

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x + 2 - \sqrt{4 + x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + 2 - \sqrt{4 + x^2}}{x} \times \frac{x + 2 + \sqrt{4 + x^2}}{x + 2 + \sqrt{4 + x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+2)^2 - (4 + x^2)}{x\left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 4x + 4 - 4 - x^2}{x\left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4x}{x\left(x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4}{x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}}$$

$$= \frac{4}{0 + 2 + \sqrt{0 + 4}}$$

$$= 1$$

نتيجة : تكون f مستمرة عند 0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$ أي $1 = f(0)$

منه : $\alpha = 1$ و هو المطلوب

التمرين ـــ66

f دالة معرفة على IR بـــ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - a & : x > 2 \\ \dfrac{2x^2 - a + b}{x} & : x \leq 2 \end{cases}$$

عين علاقة بين العددان الحقيقيان a و b حتى تكون الدالة f مستمرة عند 2 .

الحـــل ـــ 66

لدينا $f(2) = \frac{2(2)^2 - a + b}{2} = \frac{8 - a + b}{2}$

و $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 2} \frac{2x^2 - a + b}{x} = \frac{2(2)^2 - a + b}{2} = \frac{8 - a + b}{2}$

و $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} x^2 + 2x - a = (2)^2 + 2(2) - a = 8 - a$

نتيجة : تكون f مستمرة عند 2 إذا وفقط إذا كان : $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = f(2)$

أي : $\frac{8 - a + b}{2} = 8 - a$

أي : $8 - a + b = 16 - 2a$

أي : $2a - a + b = 16 - 8$

أي : $a + b = 8$ و هي العلاقة المطلوبة .

التمرين ـ 67

f دالة مستمرة على المجال [1 ; 0] حيث من أجل كل x من [1 ; 0] فإن $f(x) \in [0 ; 1]$

بين أن يوجد على الأقل عدد حقيقي α من [1 ; 0] حيث $f(\alpha) = \alpha$

الحـل ـ 67

لنعتبر الدالة g على المجال [1 ; 0] حيث $g(x) = f(x) - x$

لدينا g هي مجموع دالتين مستمرتين على [1 ; 0] هما : $f : x \mapsto f(x)$ و $x \mapsto -x$

إذن : g هي دالة مستمرة على [1 ; 0]

من جهة أخرى : $g(0) = f(0) - 0 = f(0)$

و $g(1) = f(1) - 1$

بما أن $f(x) \in [0 ; 1]$ من أجل $x \in [0 ; 1]$ فإن $\begin{cases} 0 \le f(0) \le 1 \\ 0 \le f(1) \le 1 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} f(0) \ge 0 \\ f(1) - 1 \le 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} g(0) \ge 0 \\ g(1) \le 0 \end{cases}$

خلاصة : $\begin{cases} g \text{ مستمرة على } [0 ; 1] \\ g(0) \times g(1) \le 0 \end{cases}$

إذن : حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد على الأقل α من [1 ; 0]

حيث $g(\alpha) = 0$

أي $f(\alpha) - \alpha = 0$

أي $f(\alpha) = \alpha$ و هو المطلوب

التمرين ـ 68

f دالة معرفة على المجال [0 ; π-] بـ $f(x) = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} x$

1 ـ تحقق أن f تقبل الإشتقاق على المجال [0 ; π-] ثم أحسب دالتها المشتقة .

2 ـ شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال [0 ; π-]

3 ـ ماذا تستنتج بالنسبة لحلول المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} x$ على المجال [0 ; π-]

الحـل ـ 68

1 ـ f هي مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق على [0 ; π-] و هما : $x \mapsto \cos x$ و $x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} x$

إذن : f قابلة للإشتقاق على [0 ; π-] و دالتها المشتقة :

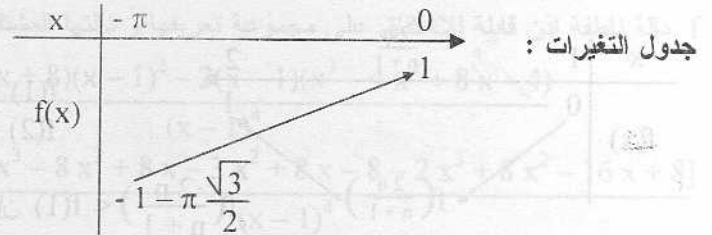
$$f'(x) = -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 ـ إشارة $f'(x)$ على [0 ; π-]

$$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow -\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \ge 0$$

$\Leftrightarrow \sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$ و هذا محقق دائما من أجل $x \in [-\pi ; 0]$ لأن $\sin x \le 0$

إذن : f متزايدة على المجال [0 ; π-]

جدول التغيرات :

$$f(-\pi) = \cos(-\pi) + \frac{\sqrt{3}}{2}(-\pi) = -1 - \pi\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(0) = \cos(0) + \frac{\sqrt{3}}{2}(0) = 1$$

3 ـ حسب جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-\pi ; 0]$ لدينا مايلي :

f مستمرة على $[-\pi ; 0]$
f متزايدة تماما على $[-\pi ; 0]$
$f(-\pi) \times f(0) < 0$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-\pi ; 0]$

أي : المعادلة $\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-\pi ; 0]$

أي : المعادلة $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $[-\pi ; 0]$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 69

n عدد طبيعي غير معدوم

1 ــ بين أن المعادلة $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2 .

2 ــ هل المعادلة $x^8 - 2x^7 + 1 = 0$ تقبل حلا على IR ؟ إذا كان الجواب نعم عين حصرا لهذا الحل .

الحل ــ 69

1 ــ نعرف الدالة f على IR بـ $f(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ حيث $n \in N^*$.

لاحظ أن من أجل $n \in N^*$ فإن $2 - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n+2-2n}{n+1} = \frac{2}{n+1} > 0$

إذن : $2 > \frac{2n}{n+1}$

لندرس الأن تغيرات الدالة f على المجال $\left[\frac{2n}{n+1} ; 2\right]$

f كثير حدود إذن قابلة للإشتقاق على IR و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1}$$
$$= x^{n-1}[(n+1)x - 2n]$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $\left[\frac{2n}{n+1} ; 2\right]$ حيث $n \in N^*$:

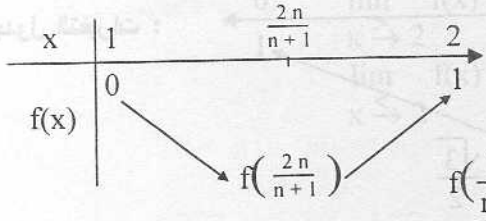
بما أن $x > 0$ فإن $x^{n-1} > 0$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(n+1)x - 2n$ كما يلي :

x	$-\infty$ $\frac{2n}{n+1}$ 2 $+\infty$
f'(x)	− 0 +

إذن على المجال $\left[\frac{2n}{n+1} ; 2\right]$ فإن $f'(x) > 0$ أي f متزايدة .

ليكن $n > 1$:

منه جدول تغيرات الدالة f على $\left[\frac{2n}{n+1} ; 2\right]$ كما يلي :

x	1		$\frac{2n}{n+1}$		2
f(x)	0	↘	$f(\frac{2n}{n+1})$	↗	1

لاحظ أن $f(1) = (1)^{n+1} - 2(1)^n + 1 = 0$

$f(2) = (2)^{n+1} - 2(2)^n + 1 = 2^{n+1} - 2^{n+1} + 1 = 1$

إذن : بما أن f متناقصة على $\left[1 ; \frac{2n}{n+1}\right]$ فإن $f(\frac{2n}{n+1}) < f(1)$

أي : $f(\frac{2n}{n+1}) < 0$

خلاصة : f مستمرة على $\left[\frac{2n}{n+1} ; 2\right]$ ، $f(\frac{2n}{n+1}) \times f(2) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا محصورا بين $\frac{2n}{n+1}$ و 2

أي المعادلة $x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0$ تقبل حلا على المجال $\left[\frac{2n}{n+1} ; 2\right]$ من أجل $n > 1$

من أجل $n = 1$ فإن $f(x) = x^2 - 2x + 1$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا مضاعفا هو $x = 1$

2 ــ لاحظ أن المعادلة $x^8 - 2x^7 + 1 = 0$ تكتب من الشكل :

$x^{7+1} - 2x^7 + 1 = 0$

إذن : هي معادلة السؤال (1) من أجل $n = 7$

و عليه فالمعادلة $x^{7+1} - 2x^7 + 1 = 0$ تقبل على الأقل حلين أحدهما يساوي 1 و الأخر محصور بين $\frac{2(7)}{7+1}$ و 2

أي محصور بين 7/4 و 2

التمرين ــ70

f دالة معرفة على IR بــ $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}$ و ليكن (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ حيث OI = 2 cm و OJ = 1 cm

1 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

2 ــ عين الأعداد الحقيقية a ; b ; c ; d حيث : من أجل كل $x \in R - \{1\}$:

$$f(x) = a x + b + \frac{c x + d}{(x-1)^2}$$

ماذا تستنتج بالنسبة للمستقيم (d) الذي معادلته y = x – 2

3 ــ أدرس وضعية (C) بالنسبة لــ (d) و لتكن A نقطة تقاطعهما .

4 ــ أرسم كل من (C) و (d)

5 ــ بين أن المعادلة f(x) = 0 تقبل حلا وحيدا α على المجال]1 ; ∞-[.

6 ــ ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة f(x) = x + m حيث m وسيط حقيقي .

7 ــ ناقش تحليليا (دون إستعمال البيان) عدد حلول المعادلة f(x) = x + m .

الحــل ــ 70

1 ــ التغيرات : f معرفة على $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1-4+8-4}{y} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$ لأن $\lim_{x \overset{<}{\to} 1} (x-1)^2 = 0^+$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1-4+8-4}{y} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} \frac{1}{y} = +\infty$$ لأن $\lim_{x \overset{>}{\to} 1} (x-1)^2 = 0^+$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$

f دالة ناطقة إذن قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها و دالتها المشتقة :

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 8x + 8)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^3 - 4x^2 + 8x - 4)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)[3x^3 - 8x^2 + 8x - 3x^2 + 8x - 8 - 2x^3 + 8x^2 - 16x + 8]}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)(x^3 - 3x^2)}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{x^2(x-3)(x-1)}{(x-1)^4}$$ من إشارة $x^2(x-1)(x-3)$

إشارة $f'(x)$ على $R - \{1\}$:

x	$-\infty$	0		1		3	$+\infty$
x^2	+	0	+	‖	+		+
$x-1$	−		−	‖	+		+
$x-3$	−		−	‖	−	0	+
الجداء	+	0	+	‖	−	0	+

منه جدول تغيرات الدالة f على $R - \{1\}$ كما يلي :

x	$-\infty$	0		1		3	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+	‖	−	0	+
$f(x)$	$-\infty$ ↗		↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{11}{4}$	↗ $+\infty$

$$f(3) = \frac{27 - 36 + 24 - 4}{4} = \frac{27 - 36 + 20}{4} = \frac{47 - 36}{4} = \frac{11}{4}$$

2 ــ تعيين الأعداد a ; b ; c ; d :

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1}$$

لنجري القسمة الإقليدية :

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 + 8x - 4 & x^2 - 2x + 1 \\ \hline x^3 - 2x^2 + x & x - 2 \\ -2x^2 + 7x - 4 & \\ -2x^2 + 4x - 2 & \\ 3x - 2 & \end{array}$$

نتيجة : $\frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} = x - 2 + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 1}$

أي : $f(x) = x - 2 + \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$

منه : $a = 1$; $b = -2$; $c = 3$; $d = -2$

بما أن $\lim_{x \to \infty} f(x) - (x-2) = \lim_{x \to \infty} \left[x - 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} - (x-2)\right]$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x - 2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3x}{x^2}$$

$$= 0$$

فإن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

3 ــ وضعية (C) بالنسبة لــ (d) :

$$f(x) - (x - 2) = \frac{3x - 2}{(x - 1)^2}$$

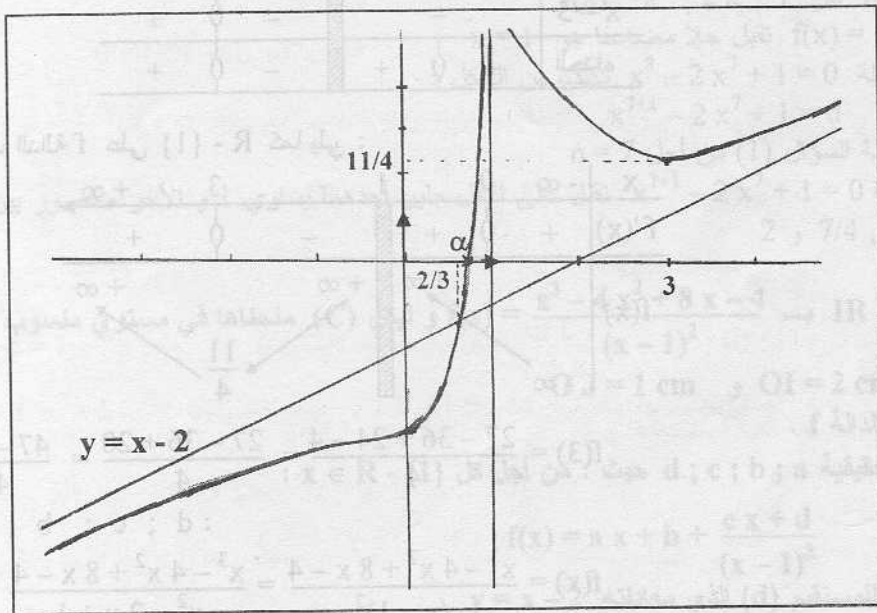
إذن : إشارة $f(x) - (x - 2)$ هي إشارة $3x - 2$ لأن المقام موجب .

x	$-\infty$		2/3		1		$+\infty$
3 x - 2		−	0	+	‖	+	

خلاصة :

لما $x \in]-\infty ; 2/3[$: $f(x) - (x - 2) < 0$ إذن (C) تحت (d)

لما $x = 2/3$: $f(x) - (x - 2) = 0$ إذن (C) يقطع (d)

لما $x \in]2/3 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$: $f(x) - (x - 2) > 0$ إذن (C) فوق (d)

ملاحظة : النقطة ذات الإحداثيات (4 - ; 0) هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C) (تنعدم المشتقة الأولى و لا تغير إشارتها)

5ــ حسب منحنى الدالة f على المجال $]-\infty ; 1[$ فإن المنحنى (C) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث $2/3 < \alpha < 1$

إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty ; 1[$

6 ــ ليكن (Δ_m) المستقيم ذو المعادلة $y = x + m$

لاحظ أن ميل المستقيم (Δ_m) ثابت يساوي 1

إذن لما الوسيط m يتغير فان المستقيم (Δ_m) يوازي المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ أي المستقيم المقارب منه المناقشة التالية:

(1) لما $m = -2$: (Δ_m) ينطبق على (d) إذن يقطع المنحنى (C) في نقطة واحدة فاصلتها 2/3 إذن المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا هو 2/3

(2) لما $m < -2$: (Δ_m) يمكن أن يكون مماس لــ المنحنى (C) إذن لنبحث عن معادلة المماس ذات الميل الذي يساوي 1

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2(x - 3)(x - 1)}{(x - 1)^4} = 1$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - 3) = (x - 1)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = (x^2 - 2x + 1)(x - 1)$$

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1$

$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1/3$

منه معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1/3 هي : $y = 1\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

لنحسب $f\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + \frac{8}{3} - 4}{4/9}$$

$$= \frac{1 - 12 + 72 - 108}{27} \times \frac{9}{4}$$

$$= -\frac{47}{27} \times \frac{9}{4}$$

$$= -\frac{47}{12}$$

إذن معادلة المماس هي : $y = x - \frac{1}{3} - \frac{47}{12}$

أي : $y = x + \frac{-4 - 47}{12}$

أي : $y = x - \frac{51}{12}$

أي : $y = x - \frac{17}{4}$

إذن : لما $m = -17/4$: (Δ_m) مماس لـ (C) أي المعادلة تقبل حلا واحدا

لما $m < -17/4$: (Δ_m) تحت المماس إذن المعادلة لا تقبل حلول

لما $-17/4 < m < -2$: (Δ_m) فوق المماس إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين

(3) لما $m > -2$: (Δ_m) يقع فوق (d) إذن يقطع المنحنى (C) في نقطتين مختلفتين ومنه المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين مختلفين

7 ـ حل المعادلة $f(x) = x + m$ في $R - \{1\}$

$f(x) = x + m \Leftrightarrow \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} = x + m$ حيث $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (x + m)(x^2 - 2x + 1)$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = x^3 - 2x^2 + x + mx^2 - 2mx + m$

$\Leftrightarrow (m + 2)x^2 - (7 + 2m)x + 4 + m = 0 \;......\; (1)$

المناقشة :

لما $m = -2$ المعادلة تكافئ : $-(7 - 4)x + 4 - 2 = 0$

أي : $-3x + 2 = 0$

أي : $x = 2/3$

إذن المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا $x = 2/3$

لما $m \neq -2$ المعادلة من الدرجة الثانية ذات الوسيط m و المجهول x

$\Delta = (7 + 2m)^2 - 4(4 + m)(m + 2)$

$= 49 + 28m + 4m^2 - 4(4m + 8 + m^2 + 2m)$

$= 49 + 28m + 4m^2 - 24m - 4m^2 - 32$

$= 4m + 17$

منه

x	$-\infty$		$-17/4$		-2		$+\infty$
Δ		−	0	+	‖	+	

إذن : لما $\Delta < 0 \;:\; m \in]-\infty \,;\, -17/4[$ إذن المعادلة لا تقبل حلول في IR

لما $\Delta = 0 \;:\; m = -17/4$ إذن المعادلة تقبل حل مضاعف .

لما $\Delta > 0 \;:\; m \in]-17/4 \,;\, -2[\, \cup \,]-2 \,;\, +\infty[$ إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين .

التمرين ــ 71

f دالة معرفة على IR بـــ $f(x) = |x+1| + \dfrac{x}{x^2-1}$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ــ أكتب f(x) دون رمز القيمة المطلقة .

2 ــ أدرس تغيرات الدالة f .

3 ــ بين أن المستقيمان $(\Delta) : y = x + 1$ و $(\Delta') : y = -x - 1$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب .

4 ــ أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) و (Δ') .

5 ــ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1 \,;\, 1[$

الحـل ــ 71

1 ــ

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x + 1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x \in [-1 \,;\, +\infty[\\ -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x \in]-\infty \,;\, -1[\end{cases}$$

2 ــ **التغيرات :**

f معرفة على $R - \{-1 \,;\, 1\}$ أي $D_f =]-\infty \,;\, -1[\, \cup \,]-1 \,;\, 1[\, \cup \,]1 \,;\, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x - 1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} -x - 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} -(-1) - 1 + \frac{-1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} -1 + 1 + \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} 1 + 1 + \frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 1 + 1 + \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-1 \,;\, 1[\, \cup \,]1 \,;\, +\infty[\\ -1 + \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-\infty \,;\, -1[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{1 + x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-1 \,;\, 1[\, \cup \,]1 \,;\, +\infty[\\ -\left(1 + \dfrac{1 + x^2}{(x^2-1)^2}\right) & : x \in]-\infty \,;\, -1[\end{cases}$$

إشارة $f'(x)$:

على المجال $]-\infty \,;\, -1[$: لدينا $f'(x) = -\left(1 + \dfrac{1 + x^2}{(x^2-1)^2}\right)$ إذن $f'(x) < 0$

$1+\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}>0$ لأن

على المجال $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=1-\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$ لندرس إشارتها

$$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow 1+x^2\leq (x^2-1)^2$$ لأن $1+x^2>0$ و $(x^2-1)^2>0$

$$\Leftrightarrow 1+x^2\leq x^4-2x^2+1$$

$$\Leftrightarrow x^4-3x^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-3)\geq 0$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		+					0	+			
x^2-3		+	0		−				0	+	
الجداء		+	0	−			0	−	0	+	

إذن على المجال $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ لدينا :

x	-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	−	‖	−	0	+	

خلاصة : إشارة $f'(x)$ على مجموعة تعريف الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$ ↘ $-\infty$		‖	$+\infty$ ↘ $-\infty$			‖	$+\infty$ ↘	$f(\sqrt{3})$	↗ $+\infty$	

3 –

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x-1)]=\lim_{x\to-\infty}\left(-x-1+\frac{x}{x^2-1}\right)-(-x-1)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}$$

$$=0$$

إذن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y=-x-1$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1+\frac{x}{x^2-1}\right)-(x+1)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}$$

$$=0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

4 ــ وضعية (Δ) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') :

على المجال $]-1 ; +\infty[$: $f(x)-(x+1)=\dfrac{x}{x^2-1}$

x	-1		0		1		$+\infty$
x	‖	−	0	+	‖	+	
x^2-1	‖	−			‖	+	
$\dfrac{x}{x^2-1}$	‖	+	0	−	‖	+	

لما $x \in]-1 ; 0[\cup]1 ; +\infty[$: $f(x)-(x+1)>0$ إذن (C) فوق (Δ)

لما $x = 0$: $f(x)-(x+1)=0$ إذن (C) يقطع (Δ)

لما $x \in]0 ; 1[$: $f(x)-(x+1)<0$ إذن (C) تحت (Δ)

على المجال $]-\infty ; -1[$: $f(x)-(-x-1)=\dfrac{x}{x^2-1}$

x	$-\infty$		-1
x		−	‖
x^2-1		+	‖
$\dfrac{x}{x^2-1}$		−	‖

لما $x \in]-\infty ; -1[$: $f(x)-(-x-1)<0$ إذن (C) تحت (Δ')

5 ــ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج مايلي :

f مستمرة على $]-1 ; 1[$
f متناقصة تماما على $]-1 ; 1[$
f تأخذ قيم موجبة ثم قيم سالبة إذن تمر بالعدد 0 .

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1 ; 1[$ حيث $f(\alpha)=0$

الجداء السلمي

الجداء السلمي في الفضاء

تعريف :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان من الفضاء

A ، B ، C ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ و $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

يوجد على الأقل مستو (P) يشمل النقط A ، B ، C بحيث الجداء السلمي للشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو الجداء السلمي للشعاعين $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ في المستوي (P)

خواص : كل خواص الجداء السلمي في المستوي تبقى صحيحة على الأشعة من نفس المستوي في الفضاء و أهمها مايلي :

من أجل $\vec{u}$ ؛ $\vec{v}$ ؛ $\vec{w}$ أشعة من الفضاء من نفس المستوي و من أجل $k \in R$

1 – $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

2 – $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

3 – $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot k \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

4 – $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

5 – $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

6 – يكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا و فقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

7 – الشعاع المعدوم $\vec{0}$ عمودي على كل أشعة الفضاء .

العبارة التحليلية للجداء السلمي في الفضاء

في أساس متعامد و متجانس . إذا كان $\vec{u}(x ; y ; z)$ و $\vec{v}(x' ; y' ; z')$ فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y' + z z'$

نتيجة : إذا كانت $A(x ; y ; z)$ ؛ $B(x' ; y' ; z')$ نقطتان فإن المسافة بينهما :

$$AB = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

نشاط :

في معلم متعامد و متجانس من الفضاء نعتبر النقط $A(-1 ; -2 ; 0)$ ؛ $B(3 ; 1 ; -2)$ ؛ $C(-2 ; 0 ; 1)$ $D(2 ; -1 ; 0)$

1 – هل المستقيمان (AB) و (CD) متعامدان ؟

2 – هل المستقيمان (AB) و (AC) متعامدان ؟

الحل :

1 – $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3+1 \\ 1+2 \\ -2-0 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2+2 \\ -1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

إذن : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 4(4) + 3(-1) + (-2)(-1) = 16 - 3 + 2 = 15$

نتيجة : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} \neq 0$ إذن : (AB) و (CD) ليسا متعامدان .

2 – $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2+1 \\ 0+2 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

منه : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4(-1) + 3(2) + (-2)(1) = -4 + 6 - 2 = 0$

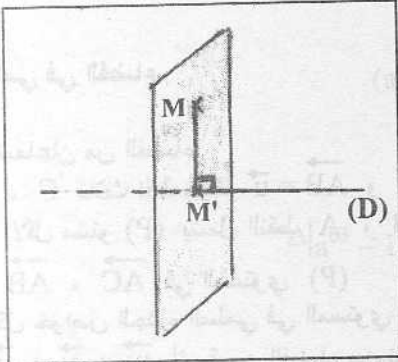
نتيجة : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ إذن : (AB) و (AC) متعامدان .

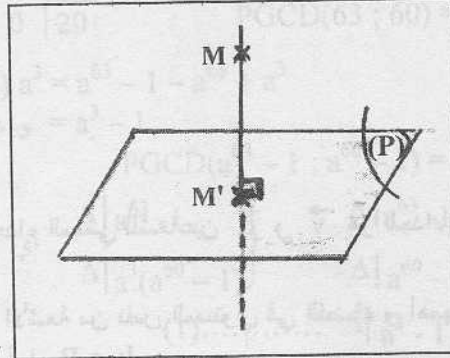
التعامد في الفضاء :

(P) مستوي . M نقطة من الفضاء

المستقيم العمودي على المستوي (P) و الذي يشمل النقطة M يقطع (P) في نقطة وحيدة 'M تسمى المسقط العمودي للنقطة M على المستوي (P)

(D) مستقيم و M نقطة من الفضاء

المستوي العمودي على (D) و الذي يشمل M يقطع (D) في نقطة وحيدة 'M تسمى المسقط العمودي للنقطة M على (D)

المسقط العمودي لنقطة على مستوي

المسقط العمودي لنقطة على مستقيم

نتائـــج مباشرة

A و B نقطتان من مستوي (P) و C نقطة لا تنتمي إلى (P)

إذا كان 'C هو المسقط العمودي لـ C على (P) فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$

A و B نقطتان متمايزتان من الفضاء .

C و D نقطتان من الفضاء لا تنتميان إلى المستقيم (AB)

نسمي 'C و 'D على الترتيب المسقطين العموديين لـ C و D على (AB)

إذن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$

مثلا : في مكعب ABCDEFGH لدينا :

A هي المسقط العمودي لـ E على (AB)

B هي المسقط العمودي لـ F على (AB)

F هي مسقط G على المستوي ABEF

إذن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB^2$

تطبيق :

ABCDEFGH مكعب ضلعه a حيث a عدد حقيقي موجب تماما .

أحسب الجداء السلمي $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC}$

<u>الحـل :</u>

A هي المسقط العمودي لـ C على المستقيم (AE)

E هي المسقط العمودي لـ H على المستقيم (AE)

إذن :

$$\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{EA}$$
$$=-\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AE}$$
$$=-AE^2$$
$$=-a^2$$

تطبيق :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

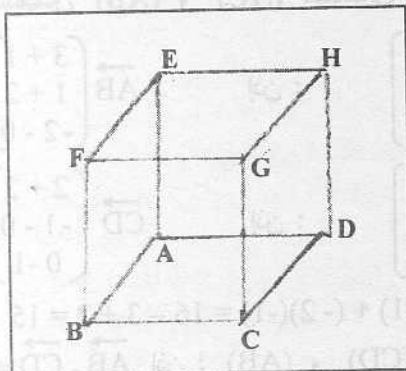
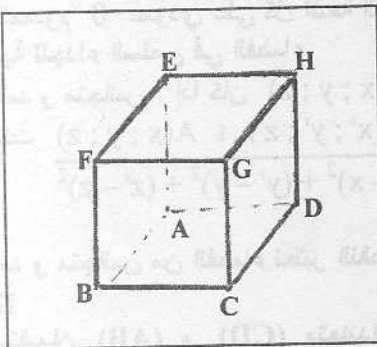
S سطح الكرة التي مركزها (0 ; 1 ; 2) و نصف قطرها $\sqrt{2}$

'S سطح الكرة التي قطرها [AB] حيث (2 - ; 0 ; 1)A ؛ B(0 ; -1 ; 2)

1 ــ أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة S .

2 ــ أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة 'S

3 ــ عين العدد الحقيقي a حتى تكون النقطة C(a ; 1 ; 0) نقطة من 'S

الحـل :

1 ـ معادلة السطح S :

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-0)^2=(\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+4+1=2$$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+3=0$ و هي معادلة السطح S .

2 ـ معادلة السطح S' :

لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من الفضاء $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y-0\\z+2\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-0\\y+1\\z-2\end{pmatrix}$

$M \in S'$ يكافئ $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

يكافئ $x(x-1)+y(y+1)+(z+2)(z-2)=0$

يكافئ $x^2+y^2+z^2-x+y-4=0$ و هي معادلة السطح S'

3 ـ تكون C نقطة من السطح S' إذا و فقط إذا كانت إحداثياها تحقق معادلة السطح S'

أي : $a^2+(1)^2+(0)^2-a+1-4=0$

أي : $a^2-a-2=0$ معادلة من الدرجة (2)

$$\Delta=1+8=9$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{1+3}{2}=2 \\ a'=\dfrac{1-3}{2}=-1 \end{cases}$$

نتيجة : توجد قيمتين لـ a تجعل النقطة C تنتمي إلى السطح S' و هما $a=2$ أو $a=-1$

المعادلة الديكارتية لمستو في الفضاء

تعريف : كل شعاع غير معدوم عمودي على شعاعين مستقلين خطيا من مستو (P) هو شعاع عمودي على المستوي (P)

نتيجة : إذا كان $\vec{n}$ شعاعا ناظميا (عموديا) على مستو (P) فإن $\vec{n}$ عمودي على كل أشعة المستوي (P) و عليه فكل مستقيم له $\vec{n}$ كشعاع توجيه هو مستقيم عمودي على المستوي (P)

تعريف مستو بنقطة منه و شعاع ناظم غير معدوم

$\vec{u}$ شعاع غير معدوم . A نقطة من الفضاء .

مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=0$ هي المستوي (P) الذي يشمل النقطة A و $\vec{u}$ شعاع ناظمي له .

البحث عن معادلة المستوي (P)

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ و $A(a\,;b\,;c)$ و $M(x\,;y\,;z)$

منه $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\\z-c\end{pmatrix}$

$M \in (P)$ يكافئ $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=0$

يكافئ $\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0$

يكافئ $\alpha x+\beta y+\gamma z-\alpha a-\beta b-\gamma c=0$ و هي المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{u}$ شعاع ناظمي له .

خاصية : كل مستوي ذات الشعاع الناظم $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ له معادلة ديكارتية من الشكل $\alpha x+\beta y+\gamma z+c=0$ حيث c عدد حقيقي .

الحالات الخاصة : $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ معلم في الفضاء

المستوي $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ له المعادلة $z=0$

المستوي $(o\,;\vec{i}\,;\vec{k})$ له المعادلة $y=0$

المستوي $(o\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ له المعادلة $x=0$

نتائج : (P) و (P') مستويان معادلاتهما على الترتيب : $\alpha x+\beta y+\gamma z+\lambda=0$ و $ax+by+cz+d=0$

1 – $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

2 – $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P')

3 – (P) // (P') يكافئ يوجد عدد حقيقي غير معدوم k حيث $\vec{u} = k\,\vec{v}$

يكافئ $\begin{cases}\alpha = k\,a\\ \beta = k\,b\\ \gamma = k\,c\end{cases}$ مع $k \in R^*$

4 – $(p) \perp (p')$ يكافئ $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

يكافئ $\alpha\,a + \beta\,b + \gamma\,c = 0$

تطبيق :

في معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ من الفضاء نعتبر النقط $A(-2\,;0\,;1)$ ؛ $B(1\,;0\,;-3)$ و $C(1\,;-1\,;2)$

1 – بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا

2 – أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3 – أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له .

<u>الحل</u> :

1 – $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+2\\0-0\\-3-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1+2\\-1-0\\2-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}$

بما أن : $3/3 \neq 0/-1$ فإن الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا .

إذن : النقط A ، B ، C تعين مستويا .

2 – لتعيين معادلة المستوي (ABC) نبحث عن شعاع ناظم له .

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

إذن : $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$ و $\vec{u} \perp \overrightarrow{AC}$

أي : $\begin{cases}\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{u}\,.\,\overrightarrow{AC} = 0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}3\,\alpha + \beta(0) - 4\,\gamma = 0\\ 3\,\alpha - \beta + \gamma = 0\end{cases}$

ليكن $\alpha = 1$ إذن : $\begin{cases}3 - 4\,\gamma = 0\\ 3 - \beta + \gamma = 0\end{cases}$

أي : $\begin{cases}\gamma = 3/4\\ \beta = 3 + \dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{4}\end{cases}$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\15/4\\3/4\end{pmatrix}$

إذن : $\overrightarrow{4\,u}$ أيضا هو شعاع ناظم للمستوي (ABC) لأن $4\,\vec{u} // \vec{u}$

إذن : يمكن أن ناخذ $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\15\\3\end{pmatrix}$

إذن : المستوي (ABC) يشمل A و $\vec{u}$ شعاع ناظم له

منه : $M \in (ABC)$ يكافئ $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ حيث $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء

يكافئ $4(x + 2) + 15(y - 0) + 3(z - 1) = 0$

يكافئ $4x + 15y + 3z + 5 = 0$ و هي معادلة المستوي (ABC)

3 ــ معادلة المستوي (P) الذي يشمل A و $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظمي له .

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-1 \\ -1-0 \\ 2+3 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$M \in (P)$ يكافئ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

يكافئ $0(x + 2) - 1(y - 0) + 5(z - 1) = 0$

يكافئ $-y + 5z - 5 = 0$

يكافئ $y - 5z + 5 = 0$ و هي معادلة المستوي (P)

بعد نقطة عن مستوي

في معلم متعامد و متجانس نعتبر (P) المستوي الذي معادلته $ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a ; b ; c) \neq (0 ; 0 ; 0)$.

لتكن $A(x_A ; y_A ; z_A)$ نقطة من الفضاء

البعد بين النقطة A و المستوي (P) هو العدد الحقيقي الموجب $\dfrac{|a x_A + b y_A + c z_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

المرجح : لتكن الجملة $\{(A_1 ; \alpha_1) ; (A_2 ; \alpha_2) ..... (A_n ; \alpha_n)\}$ حيث A_i نقط متمايزة من الفضاء و α_i أعداد حقيقية .

إذا كان $\sum_{k=1}^{n} \alpha_i \neq 0$ فإن توجد نقطة وحيدة G من الفضاء تحقق :

$\alpha_1 \overrightarrow{GA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{GA_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$. هذه النقطة G تسمى مرجح الجملة المثقلة $\{(A_1 ; \alpha_1) ; (A_2 ; \alpha_2) .... (A_n ; \alpha_n)\}$

ملاحظة : إذا كانت كل المعاملات α_i متساوية فإن G تسمى مركز ثقل الجملة

مبرهنة :

من أجل كل نقطة M من الفضاء ، إذا كانت G مرجح الجملة $\{(A_1 ; \alpha_1) ; (A_2 ; \alpha_2) .... (A_n ; \alpha_n)\}$

فإن : $\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} = (\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)\overrightarrow{MG}$

مثال : A ، B ، C نقط من الفضاء

عين مجموعة النقط (E) من الفضاء حيث $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3$

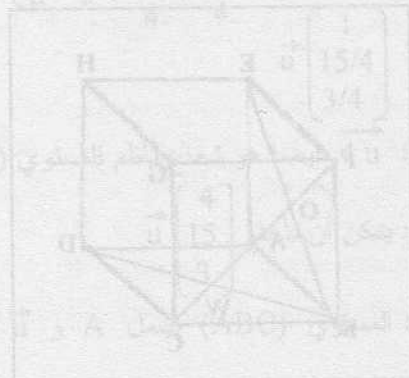
الحـل : لتكن G مركز ثقل المثلث ABC

إذن : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

منه : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 3$ يكافئ $\|3\overrightarrow{MG}\| = 3$

يكافئ $3\|\overrightarrow{MG}\| = 3$

يكافئ $\|\overrightarrow{MG}\| = 1$

إذن : M تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها G و نصف قطرها 1 .

تمارين الكتاب المدرسي

<u>التمرين – 1</u>

ABCDEFGH مكعب ضلعه a . أحسب ما يلي :

1 – $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$ 3 – $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CD}$ 5 – $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{FG}$

2 – $\overrightarrow{DB} . \overrightarrow{GC}$ 4 – $\overrightarrow{DB} . \overrightarrow{HF}$ 6 – $\overrightarrow{ED} . \overrightarrow{EC}$

<u>الحـل – 1</u>

1 – مسقط A على (AB) هو A
مسقط C على (AB) هو B

إذن : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AB} = AB^2 = a^2$

2 – مسقط B على (GC) هو C
مسقط D على (GC) هو C

إذن : $\overrightarrow{DB} . \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{CC} . \overrightarrow{GC} = 0$

3 – مسقط C على (AB) هو B
مسقط D على (AB) هو A

إذن : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AB} = -AB^2 = -a^2$

4 – مسقط H على (DB) هو D
مسقط F على (DB) هو B

إذن : $\overrightarrow{DB} . \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DB} . \overrightarrow{DB} = DB^2 = 2a^2$ (لأن $DB^2 = AB^2 + AD^2 = 2a^2$)

5 – مسقط F على (AB) هو B
مسقط G على (AB) هو B

إذن : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BB} = 0$

6 – مسقط C على (ED) هي D

إذن : $\overrightarrow{ED} . \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{ED} . \overrightarrow{ED} = ED^2 = 2a^2$

<u>التمرين – 2</u>

ABCDEFGH مكعب .

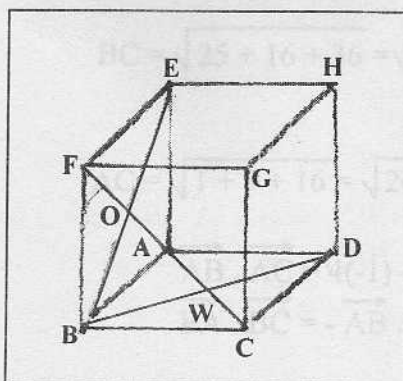
1 – أحسب $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BE}$ ثم $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BD}$

2 – إستنتج أن المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED)

<u>الحـل – 2</u>

1 – ليكن O مركز الوجه ABFE
O هو مسقط A على (BE)
O هو مسقط G على (BE)

إذن : $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OO} . \overrightarrow{BE} = 0$

ليكن w مركز الوجه ABCD
w هو مسقط A على (BD)
w هو مسقط G على (BD)

إذن : $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{ww} . \overrightarrow{BD} = 0$

2 ـ الأشعة $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BE}$ ليست مرتبطة خطيا و تنتمي إلى المستوي BED

بما أن $\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BD} = 0 \\ \overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BE} = 0 \end{matrix}\right\}$ فإن $\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BD} \\ \overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE} \end{matrix}\right\}$ إذن : $\overrightarrow{AG}$ عمودي على المستوي (BDE)

منه : المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BED)

<u>التمرين ـ 3</u>

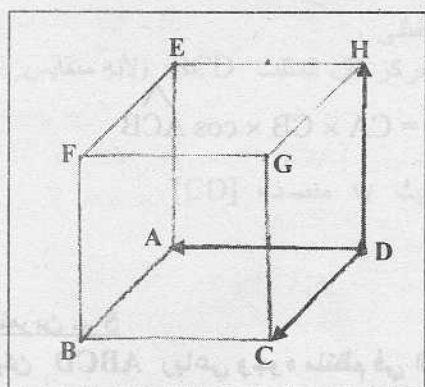
ABCDEFGH مكعب .

نعتبر المعلم $(D ; \overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DH})$

عين إحداثيات النقط A ، G ، B ، E ، D ثم أثبت أن (AG) عمودي على المستوي (BED)

<u>الحـل ـ 3</u>

في المعلم $(D ; \overrightarrow{DA} ; \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DH})$ لدينا إحداثيات النقط كما يلي :

$A(1 ; 0 ; 0)$ ؛ $G(0 ; 1 ; 1)$ ؛ $B(1 ; 1 ; 0)$ ؛ $E(1 ; 0 ; 1)$ ؛ $D(0 ; 0 ; 0)$

منه : $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 1-0 \end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

نتائج : أ) $\frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-1}$ إذن : $\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BE}$ ليس مرتبطين خطيا .

ب) $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BE} = -1(0) + 1(-1) + 1(1) = 0$ إذن : $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE}$

ج) $\overrightarrow{AG} . \overrightarrow{BD} = -1(-1) + 1(-1) + 1(0) = 0$ إذن : $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BD}$

من أ ، ب ، ج نستنتج أن $\overrightarrow{AG}$ عمودي على المستوي (BDE)

أي المستقيم (AG) عمودي على المستوي (BDE)

<u>التمرين ـ 4</u>

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

لتكن النقط $A(0 ; -1 ; 1)$ ؛ $B(4 ; -2 ; 3)$ ؛ $C(-1 ; 2 ; -3)$

1 ـ أحسب $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$ ؛ $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC}$ ؛ $\overrightarrow{CA} . \overrightarrow{CB}$

2 ـ عين قيمة مقربة إلى 0,1 درجة مئوية لأقياس الزوايا $\widehat{BAC}$ ؛ $\widehat{ABC}$ ؛ $\widehat{ACB}$

<u>الحـل ـ 4</u>

1 ـ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-0 \\ -2+1 \\ 3-1 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ منه : $AB = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1-4 \\ 2+2 \\ -3-3 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ منه : $BC = \sqrt{25+16+36} = \sqrt{77}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1-0 \\ 2+1 \\ -3-1 \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ منه : $AC = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}$

$$\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 4(-1) - 1(3) + 2(-4) = -4 - 3 - 8 = -15$$

$$\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{BC} = -[4(-5) - 1(4) + 2(-6)] = -(-36) = 36$$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=(-\overrightarrow{AC}).(-\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}=-1(-5)+3(4)-4(-6)=41$

نتائج : باستعمال تعريف الجداء السلمي حيث $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u}.\vec{v})$

منه $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$ ، $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}$

أي $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{-15}{\sqrt{21}\times\sqrt{26}}$

منه : $\widehat{BAC}\approx130°$

منه $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=BA\times BC\times\cos\widehat{ABC}$ ، $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{BA.BC}$

أي $\cos\widehat{ABC}=\dfrac{36}{\sqrt{21}\times\sqrt{77}}$

منه : $\widehat{ABC}\approx26{,}45°$

منه $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=CA\times CB\times\cos\widehat{ACB}$ ، $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{CA.CB}$

$\cos\widehat{ACB}=\dfrac{41}{\sqrt{21}\times\sqrt{77}}\approx0{,}91632982$

منه $\widehat{ACB}\approx24°$

التمرين ـ 5

ليكن ABCD رباعي وجوه منتظم في الفضاء رأسه A حيث $AB=BC=CD=AC=AD=BD=a$

1 ـ عين طبيعة وجوه الرباعي المنتظم ABCD

2 ـ أحسب بدلالة a كل من $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

3 ـ إستنتج قيمة $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CD}$

4 ـ ماذا تستنتج بالنسبة للأحرف المتقابلة من الرباعي ABCD ؟

ليكن H المسقط العمودي لـ A على المستوي (BCD)

5 ـ أحسب $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}$ (يمكن وضع $\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AH}$)

6 ـ أحسب AH بدلالة a

7 ـ أحسب حجم الهرم ABCD بدلالة a

الحـل ـ 5

1 ـ بما أن كل أحرف الرباعي ABCD متقايسة فان كل وجه من الأوجه الأربعة هو مثلث متقايس الأضلاع طول ضلعه a كما هو موضح في الشكل (أنظر الشكل)

2 ـ المستوي الذي يشمل A و يعامد المستقيم (BD) يقطع (BD) في منتصف القطعة [BD] و لتكن A'

منه : A' هي المسقط العمودي لـ A على (BD) .

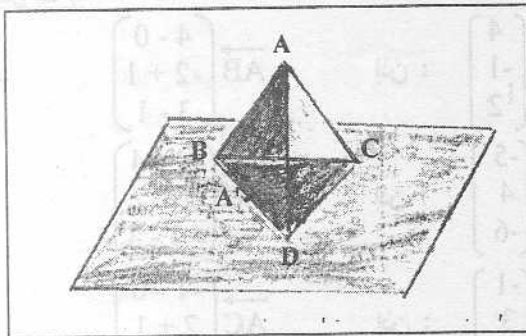
إذن : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA'}.\overrightarrow{BD}$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BD}$

$=\dfrac{1}{2}BD^2$

$=\dfrac{1}{2}a^2$

المستوي الذي يشمل A و يعامد (BC) يقطع (BC) في منتصف القطعة [BC] و لتكن A''

إذن : A'' هي مسقط A على [BC]

منه : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA''}.\overrightarrow{BC}$

$$= \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BC} . \overrightarrow{BC}$$
$$= \frac{1}{2}\ BC^2$$
$$= \frac{1}{2}\ a^2$$

3 –
$$\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD})$$
$$= \overrightarrow{BA}(- \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$$
$$= - \overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} . \overrightarrow{BD}$$
$$= - \frac{1}{2}\ a^2 + \frac{1}{2}\ a^2$$
$$= 0$$

4 – $\overrightarrow{BA} . \overrightarrow{CD} = 0$ إذن : $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CD}$

بنفس الطريقة نستنتج أن الأحرف المتقابلة من الرباعي ABCD متعامدة مثنى مثنى .

5 – H هو المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD) إذن : H هي مركز ثقل المثلث BCD (لأنه متقايس الأضلاع)

منه : $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{HD} = \vec{0}$

B تنتمي إلى محور القطعة [CD] إذن : مسقط B على (CD) هو w حيث w منصف [CD]

لكن H تنتمي إلى محور [CD] إذن : مسقط H على (CD) هو w

نتيجة : $\overrightarrow{BH} . \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ww} . \overrightarrow{CD} = 0$

6 – في المثلث القائم HAC لدينا : $AH^2 + HC^2 = AC^2$

أي $AH^2 = AC^2 - HC^2$

منه : $AH = \sqrt{AC^2 - HC^2}$ ………. (1)

في المثلث القائم HCW لدينا : $\widehat{HCW} = \frac{\pi}{6}$ لأن (CH) منصف الزاوية [CB ; CD]

منه : $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{CW}{HC}$ أي $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2\,HC}$ منه : $HC = \frac{1}{\sqrt{3}}\ a$

بالتعويض في (1) نحصل على :
$$AH = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ a\right)^2}$$
$$= \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}\ a^2}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}\ a^2}$$
$$= a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

7 – حجم الهرم V هو ثلث جداء الإرتفاع H في مساحة القاعدة BCD

لتكن S مساحة القاعدة BCD

إذن : $S = \frac{WB \times CD}{2}$

لنبحث عن WB :

في المثلث القائم WBC : $WC^2 + WB^2 = CB^2$

أي : $WB^2 = CB^2 - WC^2$

أي : $WB^2 = a^2 - \left(\frac{1}{2}\ a\right)^2$

أي : $WB^2 = a^2 - \frac{1}{4}\ a^2$

أي : $WB^2 = \frac{3}{4}a^2$

أي : $WB = \frac{\sqrt{3}}{2}\ a$

إذن : $S = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}a \times a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

منه : $V = \frac{1}{3}AH \times S = \frac{1}{3} \times a\sqrt{\frac{2}{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

أي : $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

التمرين ـ 6

ABCD رباعي وجوه منتظم طول ضلعه a .

I ، J ، K منتصفات [BC] ، [BD] و [AC] على الترتيب . أحسب ما يلي :

1 ـ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ 3 ـ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK}$

2 ـ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK}$

الحل ـ 6

1 ـ B تنتمي إلى محور [AC] إذن مسقط B على (AC) هي K منتصف [AC]

منه : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}AC^2$

$= \frac{1}{2}a^2$

2 ـ الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{IK}$ متوازيان و متعاكسان في الاتجاه .

إذن : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IK} = -AB.IK$

$= -a \times \frac{a}{2}$ لأن المثلث ICK متقايس الأضلاع .

$= -\frac{1}{2}a^2$

3 ـ المستوي الذي يشمل D و يعامد (AK) يقطع (AK) في K إذن : K هو المسقط العمودي لـ D على (AK) منه :

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AK} = AK^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}a^2$

التمرين ـ 7

ABC مثلث قائم في C . H المسقط العمودي للنقطة C على (AB)

نضع $AC = b$ ؛ $BC = a$ ؛ $CH = h$

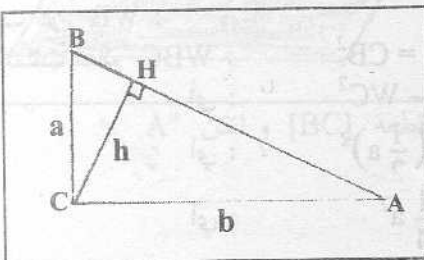
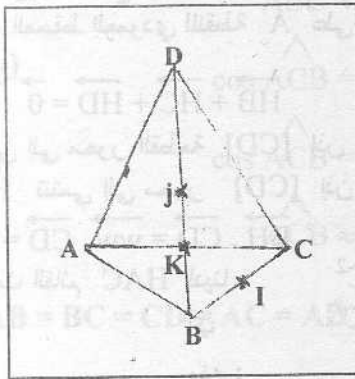
بين أن $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

الحل ـ 7

لتكن S مساحة المثلث ABC

بما أن $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$ فإن $S = \frac{1}{2}AC \times CB = \frac{1}{2}ab$

من جهة أخرى : $S = \frac{1}{2}AB \times CH = \frac{h}{2} \times AB$

منه : $\frac{1}{2}ab = \frac{h}{2}AB$ إذن : $AB = \frac{ab}{h}$

في المثلث القائم CAB لدينا : $AC^2 + CB^2 = AB^2$

أي : $b^2 + a^2 = AB^2$

أي : $b^2 + a^2 = \left(\frac{a\,b}{h}\right)^2$

أي : $b^2 + a^2 = \frac{a^2\,b^2}{h^2}$

أي : $\frac{b^2 + a^2}{a^2\,b^2} = \frac{1}{h^2}$

منه : $\frac{b^2}{a^2\,b^2} + \frac{a^2}{a^2\,b^2} = \frac{1}{h^2}$

أي : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$ و هو المطلوب

التمرين ــ 8

SABCD هرم قاعدته المربع ABCD الذي مركزه O و ضلعه a

h هو طول الارتفاع OS

1 ــ أحسب بدلالة a و h الجداءات السلمية التالية :

$\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{SD}$ ؛ $\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AS}$ ؛ $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB}$

2 ــ أحسب V حجم الهرم

3 ــ كيف يمكن إختيار h حتى يكون (SB) و (SD) متعامدين . ما هي قيمة V المرافقة ؟

4 ــ لتكن النقط $A\left(\frac{7}{2}; \frac{15}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ ؛ B(2 ; - 1 0 ; 1/2) ؛ C(- 2 ; - 5/2 ; - 15) ؛ D(- 25/2 ; 0 ; - 1)

بين أن الرباعي الوجوه ABCD منتظم ثم أحسب حجمه v

الحــل ــ 8

1 ــ $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ إذن : $\overrightarrow{OA}\,.\,\overrightarrow{OB} = 0$

O هو المسقط العمودي لــ S على (AO)

إذن : $\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AO}$

$= AO^2$

حسب فيثاغورث : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

أي : $AC^2 = 2\,a^2$

منه : $AC = a\sqrt{2}$

إذن : $AO = \frac{AC}{2} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

منه : $AO^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\,a^2$

نتيجة : $\overrightarrow{AO}\,.\,\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\,a^2$

$\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{SD} = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB})\,.\,\overrightarrow{SD}$

$= \overrightarrow{SO}\,.\,\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{OB}\,.\,\overrightarrow{SD}$

$= \overrightarrow{SD}\,.\,\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{OB}\,.\overrightarrow{OD}$ لأن { مسقط O على (SD) هي D ؛ مسقط S على (OB) هي O }

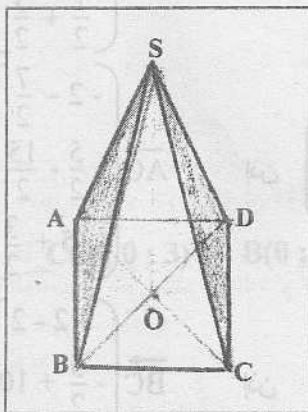
$= SD^2 - \overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{OD}$

$= SD^2 - \overrightarrow{BO}\,.\,\overrightarrow{BO}$ لأن O منتصف [BD]

$= SD^2 - BO^2$

في المثلث القائم SOD لدينا : $OS^2 + OD^2 = SD^2$

منه : $\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{SD} = OS^2 + OD^2 - BO^2$

أي : $\overrightarrow{SB}\,.\,\overrightarrow{SD} = OS^2$ لأن $OD = BO$

أي : $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SD} = h^2$

2 ــ $V = \frac{1}{3} Sh^3$ حيث S هي مساحة القاعدة $ABCD$

منه : $V = \frac{1}{3} a^2 h^3$

3 ــ يكون (SB) و (SD) متعامدان إذا و فقط إذا كان : $SD^2 + SB^2 = BD^2$ .... (I)

لأن : (1) .... $BD^2 = 2a^2$ $\quad BD^2 = AD^2 + AB^2 = 2a^2$

لأن : (2) .... $SD^2 = SB^2 = h^2 + \frac{1}{2} a^2$ $\quad SD^2 = OS^2 + OD^2 = h^2 + \frac{1}{2} a^2$

منه : العلاقة (I) تصبح : $2\left(h^2 + \frac{1}{2} a^2\right) = 2a^2$

أي : $2h^2 + a^2 = 2a^2$

أي : $2h^2 = a^2$

أي : $h^2 = \frac{a^2}{2}$

منه : $h = \frac{a}{\sqrt{2}}$ و هو المطلوب

في هذه الحالة : $V = \frac{1}{3} a^2 \times \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{a^5}{6\sqrt{2}}$

4 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 - \frac{7}{2} \\ -10 - \frac{15}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3/2 \\ -35/2 \\ 2 \end{pmatrix}$ منه $AB = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1225}{4} + 4} = \sqrt{\frac{1250}{4}}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 - \frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} - \frac{15}{2} \\ -15 + \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -11/2 \\ -10 \\ -27/2 \end{pmatrix}$ منه $AC = \sqrt{\frac{121}{4} + 100 + \frac{729}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 - 2 \\ -\frac{5}{2} + 10 \\ -15 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ 15/2 \\ -31/2 \end{pmatrix}$ منه $BC = \sqrt{16 + \frac{225}{4} + \frac{961}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}}$

$\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} \frac{7}{2} + \frac{25}{2} \\ \frac{15}{2} - 0 \\ -\frac{3}{2} + 1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} 16 \\ 15/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ إذن : $DA = \sqrt{256 + \frac{225}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}}$

$\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 2 + \frac{25}{2} \\ -10 - 0 \\ \frac{1}{2} + 1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix} 29/2 \\ -10 \\ 3/2 \end{pmatrix}$ إذن : $BD = \sqrt{\frac{841}{4} + 100 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{1250}{4}}$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}-2+\frac{25}{2}\\ -\frac{5}{2}-0\\ -15+1\end{pmatrix}$$ منه $$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}21/2\\ -5/2\\ -14\end{pmatrix}$$ إذن : $$DC=\sqrt{\frac{441}{4}+\frac{25}{4}+196}=\sqrt{\frac{1250}{4}}$$

نتيجة : D لا تنتمي إلى المستوي ABC و $AB = AC = AD = BC = DB = DC$

إذن : الرباعي الوجوه ABCD منتظم

منه : مسقط النقطة D على المستوي ABC هي مركز ثقل المثلث ABC

إذن : إرتفاعه هو $\sqrt{\frac{3}{2}}\,\alpha$ حيث α هو طول الضلع .

في هذه الحالة $\alpha=\sqrt{\frac{1250}{4}}$

إذن : الارتفاع هو : $$h=\sqrt{\frac{1250}{4}}\times\sqrt{\frac{3}{2}}=\sqrt{\frac{625}{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

منه : مساحة القاعدة : $$S=\frac{1}{2}\alpha h=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1250}{4}}\times\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{25}{\sqrt{2}}\times\frac{25\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{625\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

إذن : $$V=\frac{1}{3}Sh^3=\frac{1}{3}\times\frac{625\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\times\left(\frac{25\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{625\times\sqrt{3}\times(25)^3\times 9\sqrt{3}}{3\times 4\times\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}}$$

$$=\frac{625\times 25^3\times 9}{32}\approx 2746582{,}031$$

التمرين ـ 9

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس . نعتبر النقط $A(-1\,;1\,;2)$ ، $B(0\,;1\,;0)$ ، $C(2\,;0\,;3)$

1 ـ أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

2 ـ عين قيمة مقربة إلى 0,1 درجة لقياس الزوايا $\widehat{BAC}$ ، $\widehat{ABC}$ ، $\widehat{ACB}$

الحل ـ 9

لنبحث أولا عن مركبات الأشعة $\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{BC}$ كمايلي :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0+1\\ 1-1\\ 0-2\end{pmatrix}$$ منه $$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -2\end{pmatrix}$$ إذن : $$AB=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2+1\\ 0-1\\ 3-2\end{pmatrix}$$ منه $$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$ إذن : $$AC=\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2-0\\ 0-1\\ 3-0\end{pmatrix}$$ منه $$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$$ إذن : $$BC=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}$$

1 ـ $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=1(3)+0(-1)-2(1)=1$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = - [1(2) + 0(-1) - 2(3)] = 4$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-\overrightarrow{AC}) \cdot (- \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 3(2) - 1(-1) + 1(3) = 10$$

2 ــ باستعمال تعريف الجداء السلمي لدينا ما يلي :

منه $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ ، $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}$

أي $\cos \widehat{BAC} = \dfrac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{11}}$

أي $\cos \widehat{BAC} = 0,134839$

منه : $\widehat{BAC} \approx 82,25°$

منه $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos \widehat{ABC}$ ، $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{BA \cdot BC}$

أي $\cos \widehat{ABC} = \dfrac{4}{\sqrt{5} \times \sqrt{14}}$

أي $\cos \widehat{ABC} = 0,47809$

منه : $\widehat{ABC} \approx 61,43°$

منه $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \times CB \times \cos \widehat{ACB}$ ، $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{CA \cdot CB}$

أي $\cos \widehat{ACB} = \dfrac{10}{\sqrt{11} \times \sqrt{14}}$

أي $\cos \widehat{ACB} = 0,0,8058$

منه : $\widehat{ACB} \approx 36,31°$

تحقيق : مجموع أقياس زوايا مثلث هو $180°$

لدينا : $\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 82,25° + 61,43° + 36,31° \approx 179,99°$

التمرين ــ 10

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$ عين مركبات أشعة ناظمية لكل من المستويات التالية :

$(P_1) : \quad x + y - z = 0$ ، $(P_4) : \quad 3y - z = 0$

$(P_2) : \quad x - 2y = 0$

$(P_3) : \quad \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}y - \dfrac{3}{4}z + 3 = 0$

الحــل ــ 10

كل مستوى ذات المعادلة $\alpha x + \beta y + \gamma z + d = 0$ له شعاع ناظمي $\vec{u}$ حيث $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

منه النتائج التالية :

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P_1)

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P_2)

$\vec{w}\begin{pmatrix}1/2\\-1/4\\-3/4\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P_3)

$\vec{n}\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P_4) .

التمرين — 11

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل $A(1 ; -4 ; 3)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له .

الحل — 11

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء . إذن : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\y+4\\z-3\end{pmatrix}$

$M \in (P)$ يكافئ $\vec{u} \perp \overrightarrow{AM}$

يكافئ $\vec{u} . \overrightarrow{AM} = 0$

يكافئ $1(x-1) + 0(y+4) - 2(z-3) = 0$

يكافئ $x - 1 - 2z + 6 = 0$

يكافئ $x - 2z + 5 = 0$ و هي معادلة المستوي (P)

التمرين — 12

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي ذو المعادلة $-x + 2y + z - 3 = 0$.

و الذي يشمل النقطة $A(-1 ; 2 ; -3)$

الحل — 12

المستوي ذو المعادلة $-x + 2y + z - 3 = 0$ له شعاع ناظمي $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء إذن : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\\z+3\end{pmatrix}$

$M \in (P)$ يكافئ $\vec{u} \perp \overrightarrow{AM}$

يكافئ $\vec{u} . \overrightarrow{AM} = 0$

يكافئ $-1(x+1) + 2(y-2) + 1(z+3) = 0$

يكافئ $-x + 2y + z - 2 = 0$ و هي معادلة المستوي (P)

ملاحظة : يمكن البحث عن معادلة المستوي (P) بطريقة أخرى كمايلي :

(P) يوازي المستوي ذو المعادلة $-x + 2y + z - 3 = 0$ إذن : (P) له معادلة من الشكل :

$-x + 2y + z + \alpha = 0$ حيث α عدد حقيقي ثابت

بما أن A تنتمي إلى (P) فإن إحداثياتها تحقق معادلة المستوي (P)

أي : $-(-1) + 2(2) + (-3) + \alpha = 0$ منه $\alpha + 2 = 0$ أي $\alpha = -2$

نتيجة : معادلة (P) هي : $-x + 2y + z - 2 = 0$

في كل التمارين التابعة الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

التمرين — 13

إليك المعادلات الديكارتية لأربع مستويات :

$(P_1) : -x + 2y + z - 3 = 0$ $\qquad$ $(P_3) : x - 2y - z = 0$

$(P_2) : x - 2y + z + 3 = 0$ $\qquad$ $(P_4) : 2x + 3y - 4z + 2 = 0$

المطلوب : أذكر المستويات المتوازية و المتعامدة .

الحل — 13

لنبحث عن $\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$ ، $\vec{u_3}$ ، $\vec{u_4}$ الأشعة الناظمية على الترتيب للمستويات (P_1) ؛ (P_2) ؛ (P_3) ؛ (P_4)

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ ؛ $\vec{u_2}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ ؛ $\vec{u_3}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ ؛ $\vec{u_4}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{u_1} . \vec{u_2} = -1 - 4 + 1 = -4$ إذن : (P_1) و (P_2) ليسا متعامدان .

$\vec{u_1} . \vec{u_3} = -1 - 4 - 1 = -6$ إذن : (P_1) و (P_3) ليسا متعامدان .

$\vec{u_1}.\vec{u_4} = -2+6-4=0$ إذن : (P_1) و (P_4) متعامدان .

$\vec{u_2}.\vec{u_3} = 1+4-1=4$ إذن : (P_2) و (P_3) ليسا متعامدان .

$\vec{u_2}.\vec{u_4} = 2-6-4=-8$ إذن : (P_2) و (P_4) ليسا متعامدان .

$\vec{u_3}.\vec{u_4} = 2-6+4=0$ إذن : (P_3) و (P_4) متعامدان .

$\vec{u_1}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ إذن : $-\vec{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ منه : $-\vec{u_1}=\vec{u_3}$

إذن : $\vec{u_1} // \vec{u_3}$

منه : المستويان (P_1) و (P_3) متوازيان .

التمرين – 14

(P) مستوي معادلته $-5x+y-z-6=0$

A نقطة من الفضاء إحداثياتها $(-1\,;\,2\,;\,-6)A$

بين أن النقطة $(0\,;\,1\,;\,-1)B$ هي المسقط العمودي للنقطة A على (P)

الحـل – 14

يمكن الاجابة على هذا السؤال بطريقتين مختلفتين كما يلي :

الطريقة (1) يكفي أن نثبت أن : $B \in (P)$ .... (1) ، $\vec{AB}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) ...... (2)

(1) هل $B \in (P)$ ؟ $-5(-1)+1-0-6 = 5+1-6=0$

إذن : فعلا $B \in (P)$

(2) هل $\vec{AB}$ شعاع ناظمي لـ (P) ؟

لدينا : $\vec{AB}\begin{pmatrix}-1+6\\1-2\\0+1\end{pmatrix}$ منه $\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}$

بما أن $\vec{u}\begin{pmatrix}-5\\1\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) فإن $-\vec{AB}$ شعاع ناظمي لـ (P)

و عليه فإن $\vec{AB}$ شعاع ناظمي لـ (P) أيضا .

نتيجة : الشرطين (1) و (2) محققين إذن : فعلا B هي المسقط العمودي لـ A على المستوي (P)

الطريقة (2) يكفي أن نثبت أن بعد النقطة A عن B يساوي المسافة بين النقطة A و المستوي (P) و أن $B \in (P)$

لدينا احداثيات B تحقق معادلة (P) إذن : $B \in (P)$

لتكن D المسافة بين A و (P) : $D = \frac{|-5(-6)+2-(-1)-6|}{\sqrt{25+1+1}} = \frac{27}{\sqrt{27}} = \sqrt{27}$

لنحسب AB : $\vec{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}$

إذن : $AB = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27}$

نتيجة : B هي فعلا المسقط العمودي لـ A على المستوي (P)

التمرين – 15

لتكن النقط $A(-1\,;\,1\,;\,1)$ ، $B(0\,;\,0\,;\,-1)$ ، $C(3\,;\,-2\,;\,1)$

1 – بين أن النقط A ، B ، C تعين مستويا .

2 – عين شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

3 – أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

الحـل – 15

1 – $\vec{AB}\begin{pmatrix}0+1\\0-1\\-1-1\end{pmatrix}$ إذن : $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3+1\\-2-1\\1-1\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\\0\end{pmatrix}$

$\frac{1}{4} \neq \frac{-1}{-3}$ إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا .
منه : النقط A ، B ، C تعين مستويا .

2 ــ ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) حيث a و b عددان حقيقيان

إذن : $\vec{u}$ عمودي على كل أشعة المستوي (ABC) و خاصة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

منه : $\left.\begin{matrix}\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{u}\perp\overrightarrow{AC}\end{matrix}\right\}$ يكافئ $\left.\begin{matrix}\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{u}.\overrightarrow{AC}=0\end{matrix}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{matrix}1-a-2b=0\\ 4-3a+0=0\end{matrix}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{matrix}1-a=2b\\ 3a=4\end{matrix}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{matrix}b=\frac{1-a}{2}\\ a=4/3\end{matrix}\right\}$

يكافئ $\left.\begin{matrix}b=\frac{1-\frac{4}{3}}{2}=\frac{-1}{6}\\ a=\frac{4}{3}\end{matrix}\right\}$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\4/3\\-1/6\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

إذن : $6\vec{u}$ أيضا شعاع ناظمي أي $\vec{v}\begin{pmatrix}6\\8\\-1\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

3 ــ لتكن M(x ; y ; z) نقطة من الفضاء
$M \in (ABC)$ يكافئ $\vec{v}\perp\overrightarrow{AM}$
يكافئ $\vec{v}.\overrightarrow{AM}=0$
يكافئ $6(x+1)+8(y-1)-1(z-1)=0$
يكافئ $6x+8y-z-1=0$ و هي معادلة المستوي (ABC)

تحقيق :
$6(-1)+8(1)-1-1=8-8=0$ إذن : $A\in(ABC)$
$6(0)+8(0)-(-1)-1=1-1=0$ إذن : $B\in(ABC)$
$6(3)+8(-2)-(1)-1=18-16-2=0$ إذن : $C\in(ABC)$

التمرين ــ 16

1 ــ أكتب معادلة ديكارتية لسطح الكرة (S) التي قطرها [AB] حيث A(7 ; 2 ; - 2) و B(- 3 ; 0 ; - 4)
2 ــ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (π) مماس السطح (S) في النقطة A

الحــل ــ 16

1 ــ مركز سطح الكرة (S) هو w حيث w منتصف [AB] و نصف قطرها $\frac{AB}{2}$

إذن : $w\left(\frac{7-3}{2}\ ;\ \frac{2+0}{2}\ ;\ \frac{-2-4}{2}\right)$ أي $w(2\ ;1\ ;-3)$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3-7\\0-2\\-4+2\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-10\\-2\\-2\end{pmatrix}$ منه : $AB=\sqrt{100+4+4}=\sqrt{108}$

نتيجة : سطح الكرة (S) له المعادلة : $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+3)^2=\left(\frac{\sqrt{108}}{2}\right)^2$

أي : $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+4+1+9=108/4$

أي : $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z+14=27$

أي : $x^2+y^2+z^2-4x-2y+6z-13=0$

2 ـ المستوي (π) مماس لـ (S) عند النقطة A إذن :

(π) يشمل A
الشعاع $\overrightarrow{WA}$ ناظم للمستوي (π)

لدينا $\overrightarrow{WA}\begin{pmatrix}7-2\\2-1\\-2+3\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{WA}\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء .

$M\in(\pi)$ يكافئ $\overrightarrow{WA}\perp\overrightarrow{AM}$

يكافئ $\overrightarrow{WA}.\overrightarrow{AM}=0$

يكافئ $5(x-7)+1(y-2)+1(z+2)=0$

يكافئ $5x+y+z-35=0$ و هي معادلة المستوي (π)

التمرين ـ 17

(S) سطح كرة معادلته $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$

1 ـ عين w مركز السطح (S)

2 ـ أحسب بعد النقطة w عن المستوي (P) ذو المعادلة $4x-3z-6=0$

3 ـ هل المستوي (P) يقطع سطح الكرة (S) ؟ علل إجابتك .

الحـل ـ 17

1 ـ $x^2+y^2+z^2+2y-6z-15=0$ يكافئ $x^2+y^2+2y+1-1+z^2-6z+9-9-15=0$

يكافئ $(x-0)^2+(y+1)^2-1+(z-3)^2-9-15=0$

يكافئ $(x-0)^2+(y+1)^2+(z-3)^2-25=0$

يكافئ $(x-0)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=(5)^2$

إذن : (S) هو سطح الكرة التي مركزها $w(0;-1;3)$ و نصف قطرها 5 .

2 ـ ليكن D بعد النقطة w على المستوي (P)

$$D=\frac{|4(0)-3(3)-6|}{\sqrt{(4)^2+(0)^2+(-3)^2}}=\frac{|-15|}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3$$

3 ـ نصف قطر الكرة S أكبر من بعد المركز w عن المستوي (P) إذن : (P) يقطع السطح (S).

التمرين ـ 18 (بكالوريا)

لتكن النقط $A(-1;2;-1)$ ، $B(-6;1;1)$ ، $C(4;-3;3)$ ، $D(-1;-5;-1)$.

1 ـ عين مركبات شعاع ناظمي $\vec{u}$ للمستوي (BCD)

2 ـ إستنتج معادلة ديكارتية للمستوي (BCD)

3 ـ عين إحداثيات النقطة H حيث H هي المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (BCD)

4 ـ أحسب $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CD}$

5 ـ نسمي إرتفاع رباعي وجوه كل مستقيم يشمل أحد الرؤوس و عمودي على الوجه المقابل .

لتكن النقط $I(1;0;0)$ ، $J(0;1;0)$ ، $K(0;0;1)$

هل ارتفاعات الرباعي OIJK تتلاقى في نقطة واحدة .

الحـل ـ 18

1 ـ $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}4+6\\-3-1\\3-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}10\\-4\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-1-4\\-5+3\\-1-3\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-5\\2\\-4\end{pmatrix}$

ليكن $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}$ شعاع من الفضاء

يكون $\vec{v}$ شعاع ناظمي للمستوي (BCD) إذا و فقط إذا كان $\begin{cases}\vec{v}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$

$\begin{cases}\vec{v}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{v}\cdot\overrightarrow{CD}=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}10-4a+2b=0\\ -5-2a-4b=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}(1)\ ....\ 20-8a+4b=0\\ (2)\ ......\ -5-2a-4b=0\end{cases}$

بجمع (1) و (2) : $15-10a=0$

منه : $10a=15$

منه : $a=15/10$ أي $a=3/2$

بالتعويض في (2) : $4b=-5-2a$

أي : $4b=-5-2(3/2)$

أي : $4b=-8$ أي $b=-2$

نتيجة : $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3/2\\-2\end{pmatrix}$ منه $2\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$

نتيجة : يكفي أن نأخذ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (BCD)

2 ــ معادلة المستوي (BCD) :

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (BCD) إذن : المستوي (BCD) له معادلة ديكارتية من الشكل :

$2x+3y-4z+\alpha=0$ حيث $\alpha\in IR$

$B\in(BCD)$ إذن : $2(-6)+3(1)-4(1)+\alpha=0$

منه : $\alpha=13$

نتيجة : معادلة المستوي (BCD) هي $2x+3y-4z+13=0$

3 ــ لتكن $H(x\,;y\,;z)$ إحداثيات النقطة H

إذن : $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\\z+1\end{pmatrix}$

تكون H مسقط عمودي لــ A على المستوي (BCD) إذا و فقط إذا كان :

$\begin{cases}(1)\ ....\ \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ (2)\ ....\ \overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CD}\\ (3)\ ....\ H\in(BCD)\end{cases}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ يكافئ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

يكافئ $10(x+1)-4(y-2)+2(z+1)=0$

يكافئ $10x-4y+2z+20=0$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{CD}$ يكافئ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

يكافئ $-5(x+1)-2(y-2)-4(z+1)=0$

يكافئ $-5x-2y-4z-5=0$

$H\in(BCD)$ يكافئ $2x+3y-4z+13=0$

نتيجة : تكون H مسقط عمودي لـــ A على (BCD) إذا و فقط إذا كان :

$$\begin{cases} 10x - 4y + 2z + 20 = 0 & ......(1) \\ -5x - 2y - 4z - 5 = 0 & ....(2) \\ 2x + 3y - 4z + 13 = 0 & ....(3) \end{cases}$$

نحل هذه الجملة كمايلي :

(3) تكافئ $-2x - 3y + 4z - 13 = 0$ .....(4)

(1) تكافئ $20x - 8y + 4z + 40 = 0$ .....(5)

بجمع (2) و (4) : $-5x - 2y - 4z - 5 - 2x - 3y + 4z - 13 = 0$

أي : $-7x - 5y - 18 = 0$ .... (6)

بجمع (2) و (5) : $-5x - 2y - 4z - 5 + 20x - 8y + 4z + 40 = 0$

أي : $15x - 10y + 35 = 0$ .... (7)

نحل الجملة $\begin{cases} -7x - 5y - 18 = 0 \\ 15x - 10y + 35 = 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 14x + 10y + 36 = 0 \\ 15x - 10y + 35 = 0 \end{cases}$

بالجمع : $29x + 71 = 0$ منه $x = -71/29$

بالتعويض في المعادلة $-7x - 5y - 18 = 0$ لدينا :

$$5y = -7x - 18 = -7\left(\frac{-71}{29}\right) - 18 = \frac{497}{29} - 18 = \frac{-25}{29}$$

منه : $y = \frac{-25}{5 \times 29} = \frac{-5}{29}$

بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على :

$$2\left(\frac{-71}{29}\right) + 3\left(\frac{-5}{29}\right) - 4z + 13 = 0$$

أي : $-\frac{142}{29} - \frac{15}{29} + 13 = 4z$

أي $-\frac{157}{29} + 13 = 4z$

أي : $4z = 220/29$

أي $z = 55/29$

نتيجة : H لها الاحداثيات $\left(\frac{-71}{29} ; \frac{-5}{29} ; \frac{55}{29}\right)$

4 ــ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \frac{-71}{29} + 6 \\ \frac{-5}{29} - 1 \\ \frac{55}{29} - 1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} 103/29 \\ -34/29 \\ 26/29 \end{pmatrix}$

منه : $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{103}{29}(-5) - \frac{34}{29}(-2) + \frac{26}{29}(-4)$

$= \frac{1}{29}(-515 + 68 - 104)$

$= -551/29$

$= -19$

5 ــ المعلم متعامد و متجانس إذن لدينا النتائج التالية :

الارتفاع المتعلق بالرأس J هو محور التراتيب (yy')

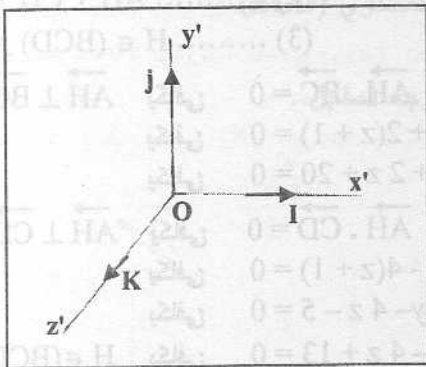
الارتفاع المتعلق بالرأس I هو محور الفواصل (xx')

الارتفاع المتعلق بالرأس K هو محور الرواقم (zz')

الارتفاع المتعلق بالرأس O هو محور التراتيب

نتيجة : كل الارتفاعات تتقاطع في نقطة واحدة هي المبدأ O

التمرين ــ 19

لتكن النقط $A(1 ; 2 ; -2)$ ، $B(2 ; 3 ; -2)$ ، $D(0 ; 3 ; -2)$ ، $E(1 ; 2 ; -2+\sqrt{2})$

1 ــ تحقق أن $AB = AD = AE$

2 ــ تحقق أن المستقيمات (AB) ، (AD) ، (AE) متعامدة مثنى مثنى .

الحــل ــ 19

1 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\3-2\\-2+2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ منه $AB=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-1\\3-2\\-2+2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ منه $AD=\sqrt{1+1+0}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}1-1\\2-2\\-2+\sqrt{2}+2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ منه $AE=\sqrt{0+0+2}=\sqrt{2}$

نتيجة : $AB = AD = AE = \sqrt{2}$

2 ــ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = -1+1+0=0$ إذن $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = 0+0+0=0$ إذن $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} = 0+0+0=0$ إذن $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AE}$

نتيجة : (AB) ، (AD) و (AE) متعامدة مثنى مثنى .

التمرين ــ 20

لتكن النقط $A(1 ; -1 ; 0)$ ، $B(2 ; 3 ; -4)$ ، $C(-3 ; 0 ; 1)$

$\vec{n}$ شعاع مركباته $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\15\\17\end{pmatrix}$

1 ــ تحقق أن النقط A ، B ، C ليست على إستقامية

2 ــ أحسب $\overrightarrow{AB}.\vec{n}$ و $\overrightarrow{AC}.\vec{n}$ ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC)

3 ــ عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يوازي المستوي (ABC) و يمر من النقطة $D(-2 ; 2 ; -1)$

الحــل ــ 20

1 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\3+1\\-4-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\4\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3-1\\0+1\\1-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\1\\1\end{pmatrix}$

نتيجة : $\frac{1}{-4}\neq\frac{4}{1}$ إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا .

منه : النقط A ، B ، C ليست على استقامية

2 ــ $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 1(8)+4(15)-4(17) = 8+60+68=0$

$\overrightarrow{AC}.\vec{n} = -4(8)+1(15)+1(17) = -32+32=0$

نتيجة : الشعاع $\vec{n}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

إذن : $\vec{n}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC) .

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء .

$M\in(ABC)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

يكافئ $8(x-1)+15(y+1)+17(z-0)=0$

يكافئ $8x+15y+17z+7=0$ و هي معادلة المستوي (ABC)

4 ـ المستوي (P) يوازي المستوي (ABC) إذن : (P) له معادلة من الشكل :

$8x+15y+17z+\alpha=0$ حيث α عدد حقيقي ثابت .

$D \in (P)$ إذن : احداثيات D تحقق المعادلة $8x+15y+17z+\alpha=0$

منه : $8(-2)+15(2)+17(-1)+\alpha=0$

أي : $\alpha=16-30+17$

أي : $\alpha=3$

نتيجة : معادلة المستوي (P) هي : $8x+15y+17z+3=0$

التمرين ـ 21

لتكن النقط $A(-1;2;0)$ ؛ $B(-3;4;2)$ ؛ $C(1;-2;-1)$

1 ـ بين أن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا .

2 ـ بين أن الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ يكون ناظمي للمستوي (ABC) إذا و فقط إذا كان $\begin{cases}-2a+2b+2c=0\\2a-4b-c=0\end{cases}$

3 ـ استنتج شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) بمركبات صحيحة . ثم أكتب معادلة للمستوي (ABC)

الحـل ـ 21

1 ـ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3+1\\4-2\\2-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1+1\\-2-2\\-1-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\\-1\end{pmatrix}$

نتيجة : $\frac{-2}{2}\neq\frac{2}{-4}$ إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا مرتبطين خطيا .

2 ـ $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC) يكافئ $\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}-2a+2b+2c=0\\2a-4b-c=0\end{cases}$ و هو المطلوب

3 ـ ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC) إذن : $\begin{cases}-2a+2b+2c=0\;.....\;(1)\\2a-4b-c=0\;.........(2)\end{cases}$

بجمع (1) و (2) : $2b+2c-4b-c=0$

أي : $-2b+c=0$

أي : $c=2b$

ليكن $b=2$ إذن : $c=4$

بالتعويض في (2) : $2a=4b+c$ أي : $2a=4(2)+4$

منه $a=12/2=6$

نتيجة : $\vec{n}\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

ملاحظة : الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ هو أيضا شعاع ناظمي للمستوي (ABC) لأنه يوازي $\vec{n}$

إذن : نأخذ $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$

لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء

$M \in (ABC)$ يكافئ $\vec{n} . \overrightarrow{AM} = 0$

يكافئ $3(x + 1) + 1 (y - 2) + 2(z - 0) = 0$

يكافئ $3 x + y + 2 z + 1 = 0$ و هي معادلة المستوي (ABC)

التمرين ـــ 22

(P) مستوي معادلته $3 x - y + 4 z + 1 = 0$

أحسب ℓ بعد النقطة $A(-1 ; 2 ; -1)$ عن المستوي (P)

الحـل ـــ 22

$$\ell = \frac{|3(-1) - (2) + 4(-1) + 1|}{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (4)^2}} = \frac{|-3 - 2 - 4 + 1|}{\sqrt{9 + 1 + 16}} = \frac{8}{\sqrt{26}}$$

التمرين ـــ 23

لتكن النقط $A(1 ; 0 ; 1)$ ؛ $B(3 ; -2 ; 0)$ ؛ $C(2 ; 4 ; -5)$ ؛ $D(3 ; 5 ; 3)$

1 ـــ عين شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

2 ـــ أحسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC)

الحـل ـــ 23

1 ـــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\-2-0\\0-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2-1\\4-0\\-5-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\4\\-6\end{pmatrix}$

نتيجة : $\frac{-2}{4} \neq \frac{2}{1}$ إذن : النقط A ، B ، C تعين مستويا .

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاعا ناظميا للمستوي (ABC)

$\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}\\ \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}\vec{n} . \overrightarrow{AB} = 0\\ \vec{n} . \overrightarrow{AC} = 0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}2 - 2 b - c = 0\\ 1 + 4 b - 6 c = 0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}4 - 4 b - 2 c = 0 \ ...... \ (1)\\ 1 + 4 b - 6 c = 0 \ ...... \ (2)\end{cases}$

بجمع (1) و (2) : $4 + 1 - 2 c - 6 c = 0$

أي : $5 - 8 c = 0$ منه $c = 5/8$

بالتعويض في (2) : $4 b = 6 c - 1$ منه $4 b = 6(5/8) - 1$

أي $4 b = \frac{15}{4} - 1$

أي $b = 11/16$

نتيجة : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\11/16\\5/8\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـــ المستوي (ABC)

منه : $\vec{u}\begin{pmatrix}16\\11\\10\end{pmatrix}$ هو أيضا شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

إذن : معادلة (ABC) هي : $16x + 11y + 10z + \alpha = 0$ حيث α عدد حقيقي ثابت

$16(1) + 11(0) + 10(1) + \alpha = 0$: إذن $A \in (ABC)$

منه : $26 + \alpha = 0$ أي $\alpha = -26$

نتيجة : معادلة المستوي (ABC) هي $16x + 11y + 10z - 26 = 0$

2 ـ لتكن ℓ المسافة بين D و المستوي (ABC)

$$\ell = \frac{|16(3) + 11(5) + 10(3) - 26|}{\sqrt{16^2 + 11^2 + 10^2}} = \frac{|48 + 55 + 30 - 26|}{\sqrt{256 + 121 + 100}} = \frac{107}{\sqrt{477}}$$

التمرين ــ 24

أحسب بعد النقطة O مبدأ المعلم عن المستوي (P) الذي معادلته : $2x - 3y + 6z - 7 = 0$

الحــل ــ 24

لتكن ℓ بعد المبدأ O عن المستوي (P)

$$\ell = \frac{|2(0) - 3(0) + 6(0) - 7|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{7}{\sqrt{49}} = 1$$

التمرين ــ 25

ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $y = 2x - 1$

M النقطة ذات الاحداثيات $M(3 ; 0 ; 2)$

1 ــ عين ℓ بعد النقطة M عن (P)

2 ــ استنتج بعد النقطة M عن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = 2x - 1$ في المستوي $(x o y)$

الحــل ــ 25

1 ــ $y = 2x - 1$ يكافئ $2x - y - 1 = 0$

منه :

$$\ell = \frac{|2(3) - (0) + 0(2) - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 0}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

2 ــ لتكن H المسقط العمودي للنقطة M على المستوي ذو المعادلة $y = 2x - 1$

إذن : $MH = \ell = \sqrt{5}$

و ليكن K مسقط النقطة M على المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 1$

من المستوي $(x o y)$ إذن : $HK = 2$ لأن راقم النقطة M هو 2 .

في المثلث القائم في H : HKM لدينا : $HM^2 + HK^2 = KM^2$

منه : $\ell^2 + 2^2 = KM^2$

أي : $5 + 4 = KM^2$

منه : $KM = \sqrt{9} = 3$

نتيجة : بعد النقطة M عن المستقيم ذو المعادلة $y = 2x - 1$ من المستوي $(x o y)$ هو 3 .

التمرين ــ 26

لتكن النقط $A(1 ; 0 ; -1)$ ؛ $B(2 ; 2 ; 3)$ ؛ $C(3 ; 1 ; -2)$ ؛ $D(-4 ; 2 ; 1)$

1 ــ بين أن المثلث ABC قائم ثم أحسب مساحته .

2 ــ بين أن الشعاع $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (ABC)

3 ــ استنتج معادلة للمستوي (ABC)

4 ــ أحسب الحجم V لرباعي الوجوه $DABC$

الحــل ــ 26

1 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-1\\2-0\\3+1\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ منه : $AB = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-1\\1-0\\-2+1\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ منه : $AC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}3-2\\1-2\\-2-3\end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-1\\-5\end{pmatrix}$ منه : $BC=\sqrt{1+1+25}=\sqrt{27}$

نتيجة : $AB^2+AC^2=21+6=27=BC^2$

إذن : حسب فيثاغورث فإن ABC مثلث قائم في A

إذن : المساحة S للمثلث ABC هي : $S=\frac{1}{2}AB\times AC$

إذن : $S=\frac{1}{2}\sqrt{21}\times\sqrt{6}=\frac{3\sqrt{14}}{2}$

2 ــ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2(1)-3(2)+1(4)=0$ إذن : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2(2)-3(1)+1(-1)=0$ إذن : $\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

نتيجة : $\vec{n}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

3 ــ $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC) إذن : (ABC) له المعادلة $2x-3y+z+\alpha=0$ حيث $\alpha\in IR$

$A\in(ABC)$ إذن : $2(1)-3(0)+(-1)+\alpha=0$

إذن : $\alpha=-1$

منه : معادلة المستوي (ABC) : $2x-3y+z-1=0$

4 ــ $V=\frac{1}{3}S\times H$ حيث H هو الارتفاع المتعلق بالرأس D

منه H هي المسافة بين النقطة D و المستوي (ABC) كمايلي :

$$H=\frac{|2(-4)-3(2)+(1)-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{|-14|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

منه : $V=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{14}}{2}\times\sqrt{14}=14/2=7$

ملاحظة : هذه المسافات و المساحات و الحجوم مقدرة بوحدة القياس

التمرين ــ 27

(P) و (Q) مستويان معرفين بالمعادلتين : $2x+y-z=0$ و $x-y+2z=0$ على الترتيب .

1 ــ تحقق أن $A(1;0;-3)$ متساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)

2 ــ عين مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)

الحـل ــ 27

1 ــ المسافة بين A و المستوي (P) : $\frac{|2(1)+(0)-(-3)|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$

المسافة بين A و المستوي (Q) : $\frac{|(1)-(0)+2(-3)|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{6}}$

نتيجة : النقطة A متساوية البعد عن المستويين (P) و (Q)

2 ــ لتكن $M(x;y;z)$ نقطة من الفضاء

نسمي ℓ مسافة النقطة M عن المستوي (P)

نسمي h مسافة النقطة M عن المستوي (Q)

لدينا :
$$\begin{cases} \ell = \dfrac{|2x+y-z|}{\sqrt{4+1+1}} = \dfrac{|2x+y-z|}{\sqrt{6}} \\ h = \dfrac{|x-y+2z|}{\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{|x-y+2z|}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

نتيجة : $\ell = h$ يكافئ $\dfrac{|2x+y-z|}{\sqrt{6}} = \dfrac{|x-y+2z|}{\sqrt{6}}$

يكافئ $|2x+y-z| = |x-y+2z|$

يكافئ
$$\begin{cases} 2x+y-z = x-y+2z \\ \text{أو} \\ 2x+y-z = -(x-y+2z) \end{cases}$$

يكافئ
$$\begin{cases} 2x+y-z-x+y-2z = 0 \\ \text{أو} \\ 2x+y-z+x-y+2z = 0 \end{cases}$$

يكافئ
$$\begin{cases} x+2y-3z = 0 \\ \text{أو} \\ 3x+z = 0 \end{cases}$$

نتيجة : مجموعة النقط M المتساوية المسافة عن المستويين (P) و (Q) هي النقط التي تنتمي إلى أحد المستويين الذين معادلاتهما $x+2y-3z=0$ أو $3x+z=0$

مثلا : النقطة $A(1 ; 0 ; -3)$ تنتمي إلى المستوي الذي معادلته $3x+z=0$

النقطة $B(1 ; 1 ; 1)$ تنتمي إلى المستوي الذي معادلته $x+2y-3z=0$

التمرين – 28

A ، B ، C ثلاث نقط من الفضاء حيث ABC مثلث قائم في C و متساوي الساقين .

(P) مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق : $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = 2\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

تحقق أن (P) مستوي عمودي على المستوي (ABC) يطلب تعيين تقاطعهما .

الحـل – 28

لتكن G_1 مرجح الجملة $\{(A ; 3) ; (B ; 1)\}$ إذن : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{MG_1}$

لتكن G_2 مرجح الجملة $\{(B ; 1) ; (C ; 1)\}$ إذن : $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MG_2}$ (G_2 هي منتصف [BC])

إذن : $\|3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\| = 2\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$ يكافئ $\|4\overrightarrow{MG_1}\| = 2\|2\overrightarrow{MG_2}\|$

يكافئ $4\|\overrightarrow{MG_1}\| = 4\|\overrightarrow{MG_2}\|$

يكافئ $\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MG_2}\|$

إذن : M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[G_1G_2]$

بما أن G_1 و G_2 تنتميان إلى المستوي (ABC) فإن المستوي المحوري للقطعة $[G_1G_2]$ هو مستوي عمودي على المستوي (ABC) و يقطعه في المستقيم الذي هو محور القطعة المستقيمة $[G_1G_2]$

التمرين – 29

(P) مستوي . O نقطة من (P) و (Δ) مستقيم من (P) يشمل O

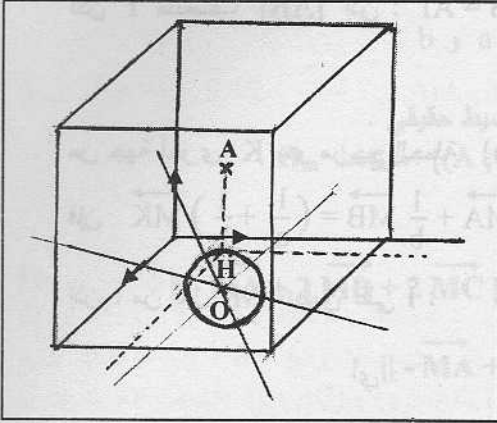
A نقطة من الفضاء لا تنتمي إلى المستوي (P)

نرفق بالنقطة A المسقط العمودي M لـ A على المستقيم (Δ)

ما هي مجموعة النقط M لما يأخذ المستقيم (Δ) كل الوضعيات الممكنة .

الحـل – 29

M هي المسقط العمودي للنقطة A على (Δ)

(Δ) يشمل O إذن لما (Δ) يغير الوضعية فإن يدور حول النقطة O و عليه فإن المسافة بين O و M ثابتة و تساوي المسافة بين O و المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P)

نتيجة : لتكن H المسقط العمودي لــ A على المستوي (P)
إذن : لما (Δ) يأخذ كل الوضعيات الممكنة فإن M
تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O و نصف قطرها OH
(محتواة في المستوي (P))
ملاحظة : إذا كان المسقط العمودي لـ A على المستوي (P) هي O
فإن مجموعة النقط M لما (Δ) يأخذ كل الوضعيات هي النقطة O فقط .

التمرين ــ 30

ABCD رباعي وجوه منتظم . (P) هي مجموعة نقط الفضاء M التي تحقق :

$$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD})=0$$

ما هي طبيعة مجموعة النقط (P) ؟

الحــل ــ 30

لتكن الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;1);(C;-1);(D;-1)\}$
مجموع المعاملات معدوم إذن : الجملة لا تقبل مرجح .
منه : الشعاع $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$ ثابت لا يتعلق باختيار النقطة M
نضع $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$
من أجل M تنطبق على A نحصل على : $\vec{u}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$
أي : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}$
أي : $\vec{u}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$
أي : $\vec{u}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}$

لتكن الجملة المثقلة $\{(A;1);(B;1);(C;1);(D;1)\}$
مجموع المعاملات غير معدوم يساوي 4 إذن الجملة تقبل مرجحا G هو مركز ثقل الرباعي الوجوه ABCD
منه : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

نتيجة :

$(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD})=0$ يكافئ $4\overrightarrow{MG}\cdot\vec{u}=0$
يكافئ $\overrightarrow{MG}\cdot\vec{u}=0$

إذن : (P) هو المستوي الذي يشمل النقطة G و $\vec{u}$ شعاع ناظمي له .

التمرين ــ 31

A و B نقطتان متمايزتان من الفضاء
ليكن G مرجح الجملة $\{(A;a);(B;b)\}$ حيث $a+b\neq 0$
و ليكن K مرجح الجملة $\{(A;1/a);(B;1/b)\}$ حيث $a\neq 0$ و $b\neq 0$
نضع I منتصف [AB]
1 ــ برر وجود النقطة K
2 ــ بين أن I هي منتصف [GK]
3 ــ أحسب GK بدلالة AB
4 ــ عين الشرط على a و b حتى يكون $GK>AB$

الحــل ــ 31

1 ــ $a\neq 0$ و $b\neq 0$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$ إذن : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\neq 0$ لأن $a+b\neq 0$

منه : النقطة K موجودة (مجموع المعاملات غير معدوم)

2 ــ G مرجح الجملة $\{(A;a);(B;b)\}$ إذن : من أجل كل نقطة M فإن :
إذن : $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}=(a+b)\overrightarrow{MG}$
لما M تنطبق على I فإن : $a\overrightarrow{IA}+b\overrightarrow{IB}=(a+b)\overrightarrow{IG}$

لكن I منتصف $[AB]$ إذن : $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{AI}$ منه $a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{AI} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}$

أي $a\,\overrightarrow{IA} - b\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}$

أي $(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}$ .... (1)

من جهة أخرى K هو مرجح الجملة $\{(A\,;1/a)\,;(B\,;1/b)\}$ إذن : من أجل كل نقطة M

فإن $\frac{1}{a}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{b}\overrightarrow{MB} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\overrightarrow{MK}$

إذن : من أجل M تنطبق على I : $\frac{1}{a}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{b}\overrightarrow{IB} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\overrightarrow{IK}$

أي : $\frac{1}{a}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{b}\overrightarrow{IB} = \frac{a+b}{ab}\overrightarrow{IK}$

منه : $\overrightarrow{IA} + \frac{a}{b}\overrightarrow{IB} = \frac{a+b}{b}\overrightarrow{IK}$

لكن $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$

منه : $\overrightarrow{IA} - \frac{a}{b}\overrightarrow{IA} = \frac{a+b}{b}\overrightarrow{IK}$

أي $\left(1 - \frac{a}{b}\right)\overrightarrow{IA} = \frac{a+b}{b}\overrightarrow{IK}$

أي $\frac{b-a}{b}\overrightarrow{IA} = \frac{a+b}{b}\overrightarrow{IK}$

أي $(b-a)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IK}$ .... (2)

نتيجة : من العلاقتين (1) و (2) لدينا :

$\begin{cases}(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}\\(b-a)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IK}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}\\-(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IK}\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}\\(a-b)\,\overrightarrow{IA} = -(a+b)\,\overrightarrow{IK}\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}\\(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{KI}\end{cases}$

يكافئ $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{KI}$

يكافئ I منتصف $[KG]$

3 ـــ من المساواة (1) لدينا : $(a-b)\,\overrightarrow{IA} = (a+b)\,\overrightarrow{IG}$

منه : $\frac{a-b}{a+b}\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IG}$ (لأن $a+b \neq 0$)

إذن : $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| IA = IG$

منه : $2\left|\frac{a-b}{a+b}\right| IA = 2\,IG$

أي : $2\left|\frac{a-b}{a+b}\right| \times \frac{AB}{2} = 2\,IG$ لأن $IA = \frac{AB}{2}$

منه : $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| AB = 2\,IG$

نتيجة : $KG = \left|\frac{a-b}{a+b}\right| \times AB$ لأن $2\,IG = KG$

5 ـــ $GK > AB$ يكافئ $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| AB > AB$

يكافئ $\left|\frac{a-b}{a+b}\right| > 1$ و هو الشرط الذي يحققه العددان a و b

التمرين ــ 32

ABC مثلث قائم في A و متساوي الساقين حيث AB = AC = a . m وسيط حقيقي .

1 ــ ما هو الشرط اللازم و الكافي حتى تقبل الجملة $\{(A ; -1) ; (B ; 2) ; (C ; m)\}$ مرجحا G_m .

2 ــ تحقق أن $G_0G_1 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

3 ــ عين المجموعة (Γ_1) من النقط M حيث $\| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$

4 ــ عين المجموعة (Γ_2) من النقط M حيث $\| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = AB$

الحـل ــ 32

1 ــ الجملة تقبل مرجح إذا و فقط إذا كان $-1 + 2 + m \neq 0$ أي $m \neq -1$

2 ــ من أجل $m = 0$: $-\overrightarrow{AG_0} + 2\overrightarrow{BG_0} = \vec{0}$ ...... (1)

من أجل $m = 1$: $-\overrightarrow{AG_1} + 2\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{CG_1} = \vec{0}$ ....(2)

بطرح (1) من (2) : $-\overrightarrow{AG_1} + 2\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{CG_1} + \overrightarrow{AG_0} - 2\overrightarrow{BG_0} = \vec{0}$

أي : $\overrightarrow{G_1A} + 2\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{CG_1} + \overrightarrow{AG_0} + 2\overrightarrow{G_0B} = \vec{0}$

أي : $\overrightarrow{CG_1} + \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AG_0} + 2(\overrightarrow{G_0B} + \overrightarrow{BG_1}) = \vec{0}$

أي : $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AG_0} + 2\overrightarrow{G_0G_1} = \vec{0}$

أي : $\overrightarrow{CG_0} + 2\overrightarrow{G_0G_1} = \vec{0}$

أي : $\overrightarrow{CG_0} = -2\overrightarrow{G_0G_1}$

أي : $\overrightarrow{CG_0} = 2\overrightarrow{G_1G_0}$

منه : G1 هي منتصف $[CG_0]$

لنبحث عن موضع G_0 :

لدينا : $-\overrightarrow{AG_0} + 2\overrightarrow{BG_0} = \vec{0}$ منه $\overrightarrow{AG_0} = 2\overrightarrow{BG_0}$

منه : G_0 هي نظيرة A بالنسبة إلى B

الانشاء :

البحث عن G_0G_1 :

$$G_0G_1 = \frac{1}{2}\,CG_0$$

في المثلث القائم ACG_0 لدينا : $CA^2 + AG_0^2 = CG_0^2$

منه : $a^2 + (2a)^2 = CG_0^2$

أي $5a^2 = CG_0^2$

أي $CG_0 = a\sqrt{5}$

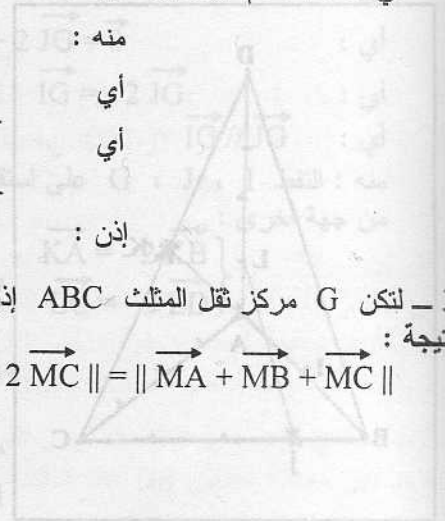
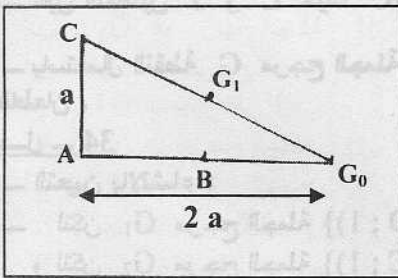
إذن : $G_0G_1 = \frac{1}{2}\,CG_0 = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

3 ــ لتكن G مركز ثقل المثلث ABC إذن : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

نتيجة :

$\| -\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$ يكافئ $\| 3\overrightarrow{MG_2} \| = \| 3\overrightarrow{MG} \|$

يكافئ $\| \overrightarrow{MG_2} \| = \| \overrightarrow{MG} \|$

يكافئ M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GG_2]$

إذن : (Γ_1) هي المستوي المحوري للقطعة $[G_2G]$

2 ـ $\|-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\| = AB$ يكافئ $\|3\overrightarrow{MG_2}\| = a$

يكافئ $3\|\overrightarrow{MG_2}\| = a$

يكافئ $\|\overrightarrow{MG_2}\| = a/3$

يكافئ M تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها G_2 و نصف قطرها a/3

التمرين ـ 33

A ، B ، C ، D نقط من الفضاء . G مرجح الجملة $\{(A\,;a)\,;(B\,;b)\,;(C\,;c)\,;(D\,;d)\}$

حيث $a+b+c+d \neq 0$ و $a \neq 0$

ما هو مرجح الجملة $\{(A\,;-a-b-c-d)\,;(B\,;b)\,;(C\,;c)\,;(D\,;d)\}$

الحـل ـ 33

$$a\,\overrightarrow{AG}+b\,\overrightarrow{BG}+c\,\overrightarrow{CG}+d\,\overrightarrow{DG}=\vec{0} \quad ....\ (1)$$

ليكن K مرجح الجملة $\{(A\,;-a-b-c-d)\,;(B\,;b)\,;(C\,;c)\,;(D\,;d)\}$

إذن : $(-a-b-c-d)\,\overrightarrow{KA}+b\,\overrightarrow{KB}+c\,\overrightarrow{KC}+d\,\overrightarrow{KD}=\vec{0}$ .... (2)

بجمع (1) و (2) : $a\,\overrightarrow{AG}+(-a-b-c-d)\,\overrightarrow{KA}+b(\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BG})+c(\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CG})+d(\overrightarrow{KD}+\overrightarrow{DG})=\vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AG}-a\,\overrightarrow{KA}-b\,\overrightarrow{KA}-c\,\overrightarrow{KA}-d\,\overrightarrow{KA}+b\,\overrightarrow{KG}+c\,\overrightarrow{KG}+d\,\overrightarrow{KG}=\vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AG}+a\,\overrightarrow{AK}+b\,\overrightarrow{AK}+c\,\overrightarrow{AK}+d\,\overrightarrow{AK}+b\,\overrightarrow{KG}+c\,\overrightarrow{KG}+d\,\overrightarrow{KG}=\vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AG}+a\,\overrightarrow{AK}+b(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KG})+c(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KG})+d(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KG})=\vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AG}+a\,\overrightarrow{AK}+b\,\overrightarrow{AG}+c\,\overrightarrow{AG}+d\,\overrightarrow{AG}=\vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AK}+(a+b+c+d)\,\overrightarrow{AG}=\vec{0}$

أي : $a\,\overrightarrow{AK}=-(a+b+c+d)\,\overrightarrow{AG}$

أي : $\overrightarrow{AK}=\dfrac{-(a+b+c+d)}{a}\,\overrightarrow{AG}$ لأن $a \neq 0$

التمرين ـ 34

ABCD رباعي وجوه . نسمي I منتصف [AB] و K منتصف [CD]

1 ـ عين النقطتين J و L حيث $\overrightarrow{BJ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AL}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

2 ـ باستعمال النقطة G مرجح الجملة $\{(A\,;3)\,;(B\,;3)\,;(C\,;1)\,;(D\,;1)\}$ بين أن المستقيمين (JL) و (IK) متقاطعان .

الحـل ـ 34

1 ـ التعيين بالانشاء :

2 ـ لتكن G_1 مرجح الجملة $\{(A\,;3)\,;(D\,;1)\}$

و لتكن G_2 مرجح الجملة $\{(B\,;3)\,;(C\,;1)\}$

إذن : G هو مرجح الجملة $\{(G_1\,;4)\,;(G_2\,;4)\}$

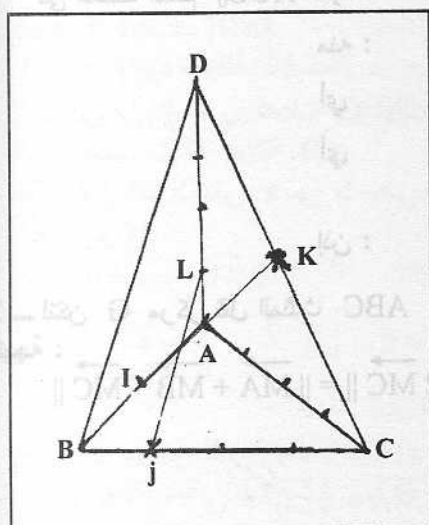
أي G هي منصف $[G_1G_2]$

لدينا : $3\,\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{DG_1}=\vec{0}$

إذن : $3\,\overrightarrow{AG_1}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AG_1}=\vec{0}$

إذن : $4\,\overrightarrow{AG_1}=-\overrightarrow{DA}$

أي $4\,\overrightarrow{AG_1}=\overrightarrow{AD}$

منه : $\overrightarrow{AG_1}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ لكن $\overrightarrow{AL}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

إذن : G_1 تنطبق على L

لدينا أيضا : $3\,\overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CG_2} = \vec{0}$

أي : $3\,\overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BG_2} = \vec{0}$

أي $4\,\overrightarrow{BG_2} = -\,\overrightarrow{CB}$

أي $\overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$ لكن $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$

إذن : G_2 تنطبق على J

نتيجة : G هي منتصف [JL]

من جهة أخرى : لتكن K_1 مرجح الجملة $\{(A ; 3) ; (B ; 3)\}$ إذن : K_1 منتصف [AB]

منه : K_1 تنطبق على I

و لتكن K_2 مرجح الجملة $\{(C ; 1) ; (D ; 1)\}$ إذن : K_2 منتصف [CD]

منه : K_2 تنطبق على K

G هي مرجح للجملة $\{(K_1 ; 4) ; (K_2 ; 4)\}$ إذن : G هي منتصف $[K_1K_2]$

أي G هي منتصف [IK]

خلاصة : $\left.\begin{array}{l} G \text{ منتصف } [JL] \\ G \text{ منتصف } [IK] \end{array}\right\}$ إذن : (JL) و (IK) متقاطعان في النقطة G

التمرين ــ 35

ABCD رباعي من المستوي . I منتصف [AC] ، J منتصف [BD]

K نقطة حيث $\overrightarrow{KA} = -2\,\overrightarrow{KB}$

L نقطة حيث $\overrightarrow{LC} = -2\,\overrightarrow{LD}$ و M منتصف [LK]

G مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; 1) ; (D ; 2)\}$

1 ــ بين أن G ينتمي إلى المستقيمين (KL) و (IJ)

2 ــ بين أن G منطبقة على M و أن M ، I ، J على استقامة واحدة . ثم حدد وضعيتها بالنسبة إلى [IJ]

الحل ــ 35

1 ــ لتكن G_1 مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (C ; 1)\}$ إذن : G_1 منتصف [AC]

منه : G_1 تنطبق على I

لتكن G_2 مرجح الجملة $\{(B ; 2) ; (D ; 2)\}$ إذن : G_2 منتصف [BD]

منه : G_2 تنطبق على J

نتيجة : G هي مرجح الجملة $\{(G_1 ; 2) ; (G_2 ; 4)\}$

منه : $2\,\overrightarrow{G_1G} + 4\,\overrightarrow{G_2G} = \vec{0}$

أي : $2\,\overrightarrow{IG} + 4\,\overrightarrow{JG} = \vec{0}$

أي : $\overrightarrow{IG} + 2\,\overrightarrow{JG} = \vec{0}$

أي : $\overrightarrow{IG} = -2\,\overrightarrow{JG}$

أي : $\overrightarrow{IG} \,//\, \overrightarrow{JG}$

منه : النقط I ، J ، G على استقامة واحدة . أي $G \in (JI)$ .... (1)

من جهة أخرى :

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{KA} = -2\,\overrightarrow{KB} \\ \overrightarrow{LC} = -2\,\overrightarrow{LD} \end{array}\right\}$ منه : $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{KA} + 2\,\overrightarrow{KB} = \vec{0} \\ \overrightarrow{LC} + 2\,\overrightarrow{LD} = \vec{0} \end{array}\right\}$

منه : $\left.\begin{array}{l} K \text{ مرجح الجملة } \{(A ; 1) ; (B ; 2)\} \\ L \text{ مرجح الجملة } \{(C ; 1) ; (D ; 2)\} \end{array}\right\}$

منه : $3\,\overrightarrow{KG} + 3\,\overrightarrow{LG} = \vec{0}$ لأن G هي مرجح الجملة $\{(K ; 3) ; (L ; 3)\}$

أي : $\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{LG} = \vec{0}$

أي : $\overrightarrow{KG} = -\,\overrightarrow{LG}$ .... (α)

أي : $\overrightarrow{KG} // \overrightarrow{LG}$

منه : G ، L ، K على استقامة واحدة .

أي $G \in (LG)$ ....(2)

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن G تنتمي إلى كل من المستقيمين (JI) و (KL)

من العلاقة (α) لدينا : $\overrightarrow{KG} = -\overrightarrow{LG}$

أي : $\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{GL}$

إذن : G هي منتصف [KL]

منه : G تنطبق على M

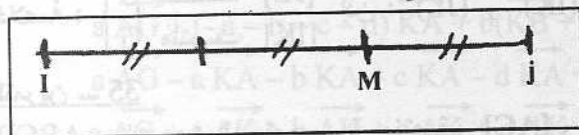
نتيجة : M ، I ، J على استقامة واحدة .

وضعية M بالنسبة إلى [IJ] :

لدينا : $\overrightarrow{IG} = -2\overrightarrow{JG}$ إذن : $\overrightarrow{IM} = -2\overrightarrow{JM}$

أي : $\overrightarrow{IM} = 2\overrightarrow{MJ}$

منه : M تنتمي إلى القطعة المستقيمة [IJ] حيث $MJ = \frac{1}{3} IJ$ كما يلي :

I M j

التمرين ـــ 36

A ، B ، C ثلاث نقط متمايزة من الفضاء

G مرجح الجملة $\{(B ; -1) ; (C ; 2)\}$

F مرجح الجملة $\{(A ; -2) ; (B ; 2) ; (C ; -4)\}$

1 ـــ بين أن F هي مرجح جملة نقطتين مرفقتين بمعاملين يطلب تعيينهما

2 ـــ عين المجموعة (E_1) من النقط M حيث $\| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = AG$

3 ـــ تحقق أن A و G تنتميان إلى (E_1)

4 ـــ عين المجموعة (E_2) من النقط M حيث $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG} \| = \| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF} \|$

الحـل ـــ 36

1 ـــ لتكن G_1 مرجح الجملة $\{(B ; 2) ; (C ; -4)\}$

من خواص المرجح أنه لا يتغير إذا ضربنا كل معاملات الجملة في نفس العدد الحقيقي غير المعدوم

إذن : G_1 هو مرجح الجملة $\{(B ; 2(-1/2)) ; (C ; -4(-1/2))\}$

أي : G_1 هو مرجح الجملة $\{(B ; -1) ; (C ; 2)\}$

أي : G1 ينطبق على G

منه : F هو مرجح الجملة $\{(G ; 2 - 4) ; (A ; -2)\}$

أي F هو مرجح الجملة $\{(G ; -2) ; (A ; -2)\}$

نتيجة : F هو منتصف القطعة [GA]

2 ـــ F هو مرجح الجملة $\{(A ; -2) ; (B ; 2) ; (C ; -4)\}$

إذن : F هو مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; -1) ; (C ; 2)\}$ (جداء المعاملات في (-1/2))

منه : $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MF}$

إذن : $\| \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} \| = AG$ يكافئ $\| 2\overrightarrow{MF} \| = AG$

يكافئ $\| \overrightarrow{MF} \| = \frac{1}{2} AG$

يكافئ M تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها F

و نصف قطرها $\frac{1}{2} AG$

نتيجة : (E_1) هو سطح الكرة ذات المركز F و نصف القطر $\frac{AG}{2}$

3 ــ F هي منتصف [AG] إذن [AG] هو قطر لسطح الكرة (E_1)
منه : A و G تنتميان إلى (E_1)

4 ــ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG} = 2\,\overrightarrow{MF}$ لأن F منتصف [AG]

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{FM}$$
$$= \overrightarrow{FA}$$

نتيجة : $\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG} \| = \| \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MF} \|$ يكافئ $\| 2\,\overrightarrow{MF} \| = \| \overrightarrow{FA} \|$

يكافئ $\| \overrightarrow{MF} \| = \frac{1}{2}\ \| \overrightarrow{FA} \|$

يكافئ M تنتمي إلى سطح الكرة ذات المركز F و نصف القطر $\frac{FA}{2}$

إذن : (E_2) هو سطح الكرة التي مركزها F و نصف قطرها $\frac{FA}{2} = \frac{AG}{4}$

التمرين ــ 37

لتكن النقط $A(1\ ;-1\ ;1)$ ؛ $B(2\ ;0\ ;1)$ و $C(-3\ ;1\ ;0)$

1 ــ تحقق أن النقط A ، B ، C تنتمي إلى المستوي (π) الذي معادلته $x - y - 6z + 4 = 0$

2 ــ علل وجود ثلاث أعداد حقيقية a ، b ، c حتى تكون النقطة $D(3\ ;1\ ;1)$ مرجح الجملة $\{(A\ ;a)\ ;(B\ ;b)\ ;(C\ ;c)\}$

الحــل ــ 37

1 ــ $1 - (-1) - 6(1) + 4 = 6 - 6 = 0$ إذن : $A \in (\pi)$

$2 - (0) - 6(1) + 4 = 6 - 6 = 0$ إذن : $B \in (\pi)$

$-3 - (1) - 6(0) + 4 = 4 - 4 = 0$ إذن : $C \in (\pi)$

2 ــ لتكن D مرجح الجملة $\{(A\ ;a)\ ;(B\ ;b)\ ;(C\ ;c)\}$

نفرض أن $a + b + c \neq 0$

$$\begin{cases} \frac{a+2b-3c}{a+b+c} = 3 \\ \frac{-a+c}{a+b+c} = 1 \\ \frac{a+b}{a+b+c} = 1 \end{cases}$$ يكافئ $$\begin{cases} a+2b-3c = 3a+3b+3c \\ -a+c = a+b+c \\ a+b = a+b+c \end{cases}$$

يكافئ $$\begin{cases} -2a-b-6c = 0 \\ -2a-b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

يكافئ $$\begin{cases} -2a-b = 0 \\ -2a-b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

يكافئ $$\begin{cases} b = -2a \\ c = 0 \end{cases}$$

من أجل $a = 1$ فإن : $(a\ ;b\ ;c) = (1\ ;-2\ ;0)$

هل $D \in (\pi)$ ؟ $3 - 1 - 6 + 4 = 6 - 6 = 0$

إذن : $D \in (\pi)$

منه : D مرجح الجملة $\{(A\ ;1)\ ;(B\ ;-2)\ ;(C\ ;0)\}$

التمرين ــ 38

في المعلم $(o\ ;\vec{i}\ ;\vec{j})$ نعتبر القطع المكافئ ذو المعادلة $y = x^2$

1 ــ أكتب معادلة المماس (T_a) لــ (P) عند النقطة A ذات الفاصلة a حيث a عدد حقيقي غير معدوم .

2 ــ ما هو معامل توجيه مستقيم عمودي على (T_a) ؟

3 ــ استنتج أن مماس (P) العمودي على (T_a) هو مماس في النقطة A' ذات الفاصلة $\left(\frac{1}{-4a}\right)$

4 ــ عين معادلة لمماس (P) عند النقطة A'

الحـل ـ 38

1 ـ ليكن (P) منحنى الدالة f المعرفة على *R بـ $f(x) = x^2$

إذن : $f'(x) = 2x$

منه : معادلة مماس المنحنى (P) عند النقطة A ذات الفاصلة a تكتب :

$y = f'(a)(x - a) + f(a)$ أي $y = 2a(x - a) + a^2$

أي : $y = 2ax - a^2$ و هي معادلة المماس (T_a)

2 ـ الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2a \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمماس (T_a)

ليكن $\vec{v}\begin{pmatrix} 2a \\ -1 \end{pmatrix}$

إذن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2a + 2a = 0$

إذن : الشعاع $\vec{v}$ عمودي على المماس (T_a)

إذن : معامل توجيه المستقيم العمودي على (T_a) هو $\frac{-1}{2a}$

3 ـ المماس (T') للمنحنى (P) و العمودي على (T_a) له معامل التوجيه $\frac{-1}{2a}$

أي : $f'(x) = \frac{-1}{2a}$

منه : $2x = \frac{-1}{2a}$

أي : $4ax = -1$

منه : $x = \frac{-1}{4a}$

أي : فاصلة نقطة تماس (T') و المنحنى (P) هي $\frac{-1}{4a}$

4 ـ لدينا : $A'\left(\frac{-1}{4a} ; \frac{1}{16a^2}\right)$

منه : معادلة (T') :

$$y = f'\left(\frac{-1}{4a}\right)\left(x + \frac{1}{4a}\right) + f\left(\frac{-1}{4a}\right)$$

أي : $y = \frac{-1}{2a}\left(x + \frac{1}{4a}\right) + \frac{1}{16a^2}$

أي : $y = \frac{-1}{2a}x - \frac{1}{8a^2} + \frac{1}{16a^2}$

أي : $y = \frac{-1}{2a}x - \frac{1}{16a^2}$

التمرين ـ 39

ABCDIJKL مكعب في الفضاء . المنسوب إلى المعلم $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AI})$

ليكن G مركز ثقل المثلث IBK .

1 ـ عين احداثيات G

2 ـ تحقق أن G تنتمي إلى المستقيم (JD)

3 ـ تحقق أن $\overrightarrow{JD}$ عمودي على $\overrightarrow{BK}$ و $\overrightarrow{BI}$. ثم استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (BIK)

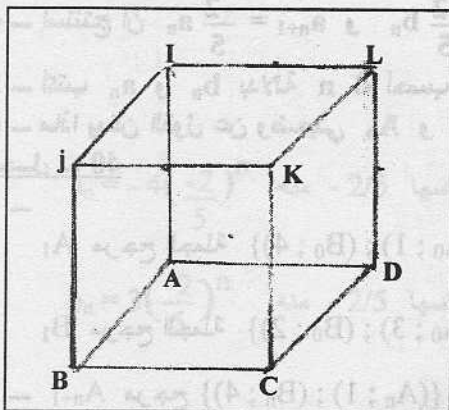
الحـل ـ 39

الانشاء : في المعلم $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AI})$ لدينا احداثيات النقط كما يلي :

A(0 ; 0 ; 0) ؛ B(1 ; 0 ; 0) ؛ I(0 ; 0 ; 1) ؛ K(1 ; 1 ; 1) ؛ J(1 ; 0 ; 1) ؛ D(0 ; 1 ; 0)

1 ـ G مركز ثقل المثلث IBK إذن : G مرجح الجملة {(I ; 1) ; (B ; 1) ; (K ; 1)}

منه : احداثيات G هي : $\left(\frac{1+1+0}{3} ; \frac{0+0+1}{3} ; \frac{0+1+1}{3}\right)$

أي $G\left(\frac{2}{3}\,;\,\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{3}\right)$

2 ــ $\overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix}1-\frac{2}{3}\\0-\frac{1}{3}\\1-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{GJ}\begin{pmatrix}1/3\\-1/3\\1/3\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}0-\frac{2}{3}\\1-\frac{1}{3}\\0-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix}-2/3\\2/3\\-2/3\end{pmatrix}$

نتيجة : $\frac{1/3}{-2/3}=-\frac{1}{2}$; $\frac{-1/3}{2/3}=-\frac{1}{2}$; $\frac{1/3}{-2/3}=-\frac{1}{2}$

إذن : $\overrightarrow{GJ}\,//\,\overrightarrow{GD}$

منه : النقط G ، J ، D على استقامة واحدة .

أي $G\in(JD)$

2 ــ $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix}0-1\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}1-1\\1-0\\1-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BK}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}0-1\\0-0\\1-0\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

نتيجة : $\overrightarrow{JD}\cdot\overrightarrow{BK}=-1(0)+1(1)-1(1)=0$ إذن : $\overrightarrow{JD}\perp\overrightarrow{BK}$

$\overrightarrow{JD}\cdot\overrightarrow{BI}=-1(-1)+1(0)-1(1)=0$ إذن : $\overrightarrow{JD}\perp\overrightarrow{BI}$

إذن : الشعاع $\overrightarrow{JD}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (BKI)

أي : المستوي (BKI) له المعادلة $-x+y-z+\alpha=0$ حيث $\alpha\in IR$

$B\in(BKI)$ إذن : $-1+0-0+\alpha=0$

أي $\alpha=1$

منه : $-x+y-z+1=0$ هي معادلة المستوي (BKI)

التمرين ــ 40

ليكن (Δ) مستقيم مزود بمعلم $(o\,;\vec{i})$. A_0 ، B_0 نقطتان من (Δ) فاصلتاهما على الترتيب (-4) و $(+3)$

لكل عدد طبيعي n نضع $\begin{cases}A_{n+1}\ \text{مرجح الجملة}\ \{(A_n\,;1)\,;(B_n\,;4)\}\\ B_{n+1}\ \text{مرجح الجملة}\ \{(A_n\,;3)\,;(B_n\,;2)\}\end{cases}$

1 ــ علم A_0 ، B_0 ، A_1 ، B_1

2 ــ ليكن a_n ، b_n فواصل النقطتين A_n و B_n على الترتيب .

عبر عن a_{n+1} و b_{n+1} بدلالة a_n و b_n

3 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي n : $3\,a_n+4\,b_n=0$

4 ـ استنتج أن $a_{n+1} = \frac{-2}{5} a_n$ و $b_{n+1} = \frac{-2}{5} b_n$

5 ـ أكتب a_n و b_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} a_n$ و $\lim_{n \to +\infty} b_n$

6 ـ ماذا يمكن القول عن وضعيتي A_n و B_n ؟

الحـل ـ 40

1 ـ

A_1 مرجح الجملة $\{(A_0 ; 1) ; (B_0 ; 4)\}$ إذن : فاصلة A_1 : $\frac{-4 + 3(4)}{4+1} = \frac{8}{5}$

B_1 مرجح الجملة $\{(A_0 ; 3) ; (B_0 ; 2)\}$ إذن : فاصلة B_1 : $\frac{-4(3) + 3(2)}{4+1} = \frac{-6}{5}$

2 ـ A_{n+1} مرجح $\{(A_n ; 1) ; (B_n ; 4)\}$ منه : $a_{n+1} = \frac{a_n + 4 b_n}{5}$

B_{n+1} مرجح $\{(A_n ; 3) ; (B_n ; 2)\}$ منه : $b_{n+1} = \frac{3a_n + 2 b_n}{5}$

3 ـ البرهان بالتراجع : لتكن الخاصية $3 a_n + 4 b_n = 0$

من أجل $n = 0$: $3 a_0 + 4 b_0 = 3(-4) + 4(3) = 0$

إذن : الخاصية محققة .

من أجل $n = 1$: $3 a_1 + 4 b_1 = 3\left(\frac{8}{5}\right) + 4\left(\frac{-6}{5}\right) = \frac{24}{5} - \frac{24}{5} = 0$

إذن : الخاصية محققة .

نفرض أن : $3 a_n + 4 b_n = 0$ من أجل $n > 1$

هل $3 a_{n+1} + 4 b_{n+1} = 0$ ؟

$$3 a_{n+1} + 4 b_{n+1} = 3\left(\frac{a_n + 4 b_n}{5}\right) + 4\left(\frac{3a_n + 2 b_n}{5}\right)$$

$$= \frac{3 a_n + 12 b_n + 12 a_n + 8 b_n}{5}$$

$$= \frac{15 a_n + 20 b_n}{5}$$

$$= \frac{5(3 a_n + 4 b_n)}{5}$$

$= 0$ لأن حسب فرضية التراجع $3 a_n + 4 b_n = 0$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $3 a_n + 4 b_n = 0$

4 ـ $3 a_n + 4 b_n = 0$ إذن : $3 a_n = - 4 b_n$

منه : $\begin{cases} a_n = \frac{-4}{3} b_n \quad ..... (1) \\ b_n = \frac{-3}{4} a_n \quad ..... (2) \end{cases}$

لدينا : $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{a_n + 4 b_n}{5} \\ b_n = \frac{-3}{4} a_n \end{cases}$ منه : $a_{n+1} = \frac{a_n + 4\left(\frac{-3}{4} a_n\right)}{5}$

أي : $a_{n+1} = \frac{a_n - 3 a_n}{5} = \frac{-2}{5} a_n$

و $\begin{cases} b_{n+1} = \frac{3a_n + 2 b_n}{5} \\ a_n = \frac{-4}{3} b_n \end{cases}$ منه : $b_{n+1} = \frac{3\left(\frac{-4}{3} b_n\right) + 2 b_n}{5}$

أي : $b_{n+1} = \frac{-4 b_n + 2 b_n}{5} = \frac{-2}{5} b_n$

نتيجة : $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{-2}{5} a_n \\ b_{n+1} = \frac{-2}{5} b_n \end{cases}$

5 ــ $\begin{cases} a_0 = -4 \\ a_{n+1} = \frac{-2}{5} a_n \end{cases}$ إذن : (a_n) متتالية هندسية حدها الأول $a_0 = -4$ و أساسها $-2/5$ منه $a_n = -4\left(\frac{-2}{5}\right)^n$

$\begin{cases} b_0 = 3 \\ b_{n+1} = \frac{-2}{5} b_n \end{cases}$ إذن : (b_n) متتالية هندسية حدها الأول $b_0 = 3$ و أساسها $-2/5$ منه $b_n = 3\left(\frac{-2}{5}\right)^n$

نتيجة : $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} -4\left(\frac{-2}{5}\right)^n = 0 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 3\left(\frac{-2}{5}\right)^n = 0 \end{cases}$

6 ــ لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن فاصلة A_n تؤول إلى 0 إذن : A_n تقترب من النقطة 0 مبدأ المعلم .

لما n يؤول إلى $+\infty$ فإن فاصلة B_n تؤول إلى 0 إذن : B_n تقترب من النقطة 0 مبدأ المعلم .

التمرين ــ 41

A ، B ، C نقط ليست على استقامة واحدة من الفضاء

H مركز ثقل المثلث ABC

G مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; 1)\}$

1 ــ بين أن B ؛ G ؛ H على استقامة واحدة .

2 ــ عين المجموعة (E) من النقط حيث : $3 \| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 4 \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$

3 ــ لتكن M نقطة من المستوي .

نضع : $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

أ) بين أن $\vec{v}$ مستقل عن النقطة M

ب) بين أن النقطة C تحقق : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

ج) عين مجموعة النقط (E') التي تحقق : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

الحــل ــ 41

1 ــ H مركز ثقل المثلث ABC إذن : H مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 1) ; (C ; 1)\}$

ليكن K مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (C ; 1)\}$ إذن : K منتصف [AC]

منه : H هي مرجح الجملة $\{(K ; 2) ; (B ; 1)\}$ منه $H \in (BK)$

من جهة أخرى G مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; 1)\}$

إذن : G مرجح الجملة $\{(K ; 2) ; (B ; 1)\}$ منه $G \in (BK)$

خلاصة : $\begin{cases} H \in (BK) \\ G \in (BK) \end{cases}$ إذن : H ، G ، B على استقامة واحدة .

2 ــ $3 \| \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = 4 \| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \|$ يكافئ $3 \| 4\overrightarrow{MG} \| = 4 \| 3\overrightarrow{MH} \|$

يكافئ $12\, MG = 12\, MH$

يكافئ $MG = MH$

يكافئ M تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة المستقيمة [GH]

3 ــ $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

أ) لتكن الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; -3)\}$

مجموع المعاملات $1 + 2 - 3 = 0$ إذن : الجملة لا تقبل مرجحا .

إذن : الشعاع $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$ مستقل تماما عن اختيار النقطة M

ب) لتكن M تنطبق على C

إذن : $\begin{cases} \vec{v} = \overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{CB} \\ \vec{u} = \overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{CB} \end{cases}$

منه : $\vec{u} = \vec{v}$ إذن : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

ج) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ يكافئ $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$

يكافئ $\|4\,\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{CB}\|$

يكافئ $4\,MG = \|\overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{CB}\|$

يكافئ $MG = \frac{1}{4}\|\overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{CB}\|$

يكافئ M تنتمي إلى الدائرة ذات المركز G و نصف القطر $\frac{1}{4}\|\overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{CB}\|$

بما أن C تحقق $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ فإن C تنتمي إلى هذه الدائرة .

و عليه فالمجموعة (E') هي الدائرة التي مركزها G و نصف قطرها GC (أي تشمل C)

التمرين ــ 42

A ، B ، C ، D نقط متمايزة من الفضاء .

I مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; -2) ; (C ; -3)\}$

J مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (C ; -3) ; (D ; 4)\}$

K مرجح الجملة $\{(1 ; A) ; (B ; -2) ; (D ; 4)\}$

1 ــ بين أن الشعاع $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC} + 4\,\overrightarrow{MD}$ مستقيل عن النقطة M

2 ــ بين أن المستقيمات (DI) ، (JB) ، (CK) متوازية

الحـل ــ 42

1 ــ لتكن الجملة $S = \{(A ; 1) ; (B ; -2) ; (C ; -3) ; (D ; 4)\}$

الجملة S لا تقبل مرجحا لأن مجموع المعاملات معدوم .

منه : الشعاع $\vec{u} = \overrightarrow{MA} - 2\,\overrightarrow{MB} - 3\,\overrightarrow{MC} + 4\,\overrightarrow{MD}$ مستقل عن النقطة M

2 ــ من أجل M تنطبق على I فإن : $\vec{u} = \overrightarrow{IA} - 2\,\overrightarrow{IB} - 3\,\overrightarrow{IC} + 4\,\overrightarrow{ID}$

لكن : $\overrightarrow{IA} - 2\,\overrightarrow{IB} - 3\,\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ لأن I مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; -2) ; (C ; -3)\}$

إذن : $\vec{u} = 4\,\overrightarrow{ID}$

منه : $\vec{u} \,//\, \overrightarrow{ID}$

من أجل M تنطبق على J فإن : $\vec{u} = \overrightarrow{JA} - 2\,\overrightarrow{JB} - 3\,\overrightarrow{JC} + 4\,\overrightarrow{JD}$

لكن : $\overrightarrow{JA} - 3\,\overrightarrow{JC} + 4\,\overrightarrow{JD} = \vec{0}$ لأن J مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (C ; -3) ; (D ; 4)\}$

إذن : $\vec{u} = -2\,\overrightarrow{JB}$

منه : $\vec{u} \,//\, \overrightarrow{JB}$

من أجل M تنطبق على K فإن : $\vec{u} = \overrightarrow{KA} - 2\,\overrightarrow{KB} - 3\,\overrightarrow{KC} + 4\,\overrightarrow{KD}$

لكن : $\overrightarrow{KA} - 2\,\overrightarrow{KB} + 4\,\overrightarrow{KD} = \vec{0}$ لأن K مرجح الجملة $\{(A ; 1) ; (B ; -2) ;(D ; 4)\}$

إذن : $\vec{u} = -3\,\overrightarrow{KC}$

منه : $\vec{u} \,//\, \overrightarrow{KC}$

نتيجة : كل من المستقيمات (DI) و (JB) و (CK) لها نفس شعاع التوجيه $\vec{u}$

إذن : فهي متوازية مثنى مثنى .

$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + x - 1$

$\Leftrightarrow 3x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 1/3$

منه معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة 1/3 هي : $y = 1\left(x - \frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right)$

لنحسب $f\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{27} - \frac{4}{9} + \frac{8}{3} - 4}{4/9}$$

$$= \frac{1 - 12 + 72 - 108}{27} \times \frac{9}{4}$$

$$= -\frac{47}{27} \times \frac{9}{4}$$

$$= -\frac{47}{12}$$

إذن معادلة المماس هي : $y = x - \frac{1}{3} - \frac{47}{12}$

أي : $y = x + \frac{-4 - 47}{12}$

أي : $y = x - \frac{51}{12}$

أي : $y = x - \frac{17}{4}$

إذن : لما $m = -17/4$: (Δ_m) مماس لـ (C) أي المعادلة تقبل حلا واحدا

لما $m < -17/4$: (Δ_m) تحت المماس إذن المعادلة لا تقبل حلول

لما $-17/4 < m < -2$: (Δ_m) فوق المماس إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين

(3) لما $m > -2$: (Δ_m) يقع فوق (d) إذن يقطع المنحنى (C) في نقطتين مختلفتين ومنه المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين مختلفين

7 ــ حل المعادلة $f(x) = x + m$ في $R - \{1\}$

$f(x) = x + m \Leftrightarrow \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{x^2 - 2x + 1} = x + m$ حيث $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = (x + m)(x^2 - 2x + 1)$

$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 + 8x - 4 = x^3 - 2x^2 + x + mx^2 - 2mx + m$

$\Leftrightarrow (m + 2)x^2 - (7 + 2m)x + 4 + m = 0$ ...... (1)

المناقشة :

لما $m = -2$ المعادلة تكافئ : $-(7 - 4)x + 4 - 2 = 0$

أي : $-3x + 2 = 0$

أي : $x = 2/3$

إذن المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلا وحيدا $x = 2/3$

لما $m \neq -2$ المعادلة من الدرجة الثانية ذات الوسيط m و المجهول x

$\Delta = (7 + 2m)^2 - 4(4 + m)(m + 2)$

$= 49 + 28m + 4m^2 - 4(4m + 8 + m^2 + 2m)$

$= 49 + 28m + 4m^2 - 24m - 4m^2 - 32$

$= 4m + 17$

منه

x	$-\infty$	$-17/4$		-2	$+\infty$
Δ	$-$	0	$+$	‖	$+$

إذن : لما $\Delta < 0 \;:\; m \in]-\infty \,;\, -17/4[$ إذن المعادلة لا تقبل حلول في IR

لما $\Delta = 0 \;:\; m = -17/4$ إذن المعادلة تقبل حل مضاعف .

لما $\Delta > 0 \;:\; m \in]-17/4 \,;\, -2[\cup]-2 \,;\, +\infty[$ إذن المعادلة تقبل حلين مختلفين .

التمرين ـــ 71

f دالة معرفة على IR بـ $f(x) = |x+1| + \dfrac{x}{x^2-1}$

نسمي (C) منحناها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1 ـــ أكتب f(x) دون رمز القيمة المطلقة .

2 ـــ أدرس تغيرات الدالة f .

3 ـــ بين أن المستقيمان $(\Delta) : y = x + 1$ و $(\Delta') : y = -x - 1$ مقاربين للمنحنى (C) عند $+\infty$ و $-\infty$ على الترتيب .

4 ـــ أدرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ) و (Δ') .

5 ـــ بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-1 \,;\, 1[$

الحـــل ـــ 71

1 ـــ

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x + 1 \geq 0 \\ -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x + 1 < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x + 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x \in [-1 \,;\, +\infty[\\ -x - 1 + \dfrac{x}{x^2-1} & : x \in]-\infty \,;\, -1[\end{cases}$$

2 ـــ التغيرات :

f معرفة على $R - \{-1 \,;\, 1\}$ أي $D_f =]-\infty \,;\, -1[\cup]-1 \,;\, 1[\cup]1 \,;\, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x - 1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} -1} -x - 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} -(-1) - 1 + \frac{-1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} -1 + 1 + \frac{-1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} 1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{<}{\to} 0} 1 + 1 + \frac{1}{y} = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} 1} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = \lim_{y \overset{>}{\to} 0} 1 + 1 + \frac{1}{y} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x + 1 + \frac{x}{x^2-1} = +\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-1 \,;\, 1[\cup]1 \,;\, +\infty[\\ -1 + \dfrac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-\infty \,;\, -1[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 - \dfrac{1 + x^2}{(x^2-1)^2} & : x \in]-1 \,;\, 1[\cup]1 \,;\, +\infty[\\ -\left(1 + \dfrac{1 + x^2}{(x^2-1)^2}\right) & : x \in]-\infty \,;\, -1[\end{cases}$$

إشارة $f'(x)$:

على المجال $]-\infty \,;\, -1[$: لدينا $f'(x) = -\left(1 + \dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}\right)$ إذن $f'(x) < 0$

$1 + \dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2} > 0$ لأن

على المجال $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ لدينا : $f'(x) = 1 - \dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$ لندرس إشارتها

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+x^2}{(x^2-1)^2} \leq 1$$

$\Leftrightarrow 1 + x^2 \leq (x^2-1)^2$ لأن $1 + x^2 > 0$ و $(x^2-1)^2 > 0$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 \leq x^4 - 2x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2-3) \geq 0$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2		+					0		+		
x^2-3		+	0		−				0	+	
الجداء		+	0	−			0	−	0	+	

إذن على المجال $]-1 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ لدينا :

x	-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	−	‖	−	0	+	

خلاصة : إشارة $f'(x)$ على مجموعة تعريف الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	

منه جدول تغيرات الدالة f على مجموعة تعريفها :

x	$-\infty$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		−	‖	−	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$f(\sqrt{3})$	↗	$+\infty$

3 —

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (-x-1)] = \lim_{x \to -\infty} \left(-x - 1 + \frac{x}{x^2-1}\right) - (-x-1)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2-1}$$

$$= 0$$

إذن المستقيم (Δ') ذو المعادلة $y = -x - 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 1 + \frac{x}{x^2-1}\right) - (x+1)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-1}$$

$$= 0$$

إذن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$

4 ــ وضعية (Δ) بالنسبة إلى كل من (Δ) و (Δ') :

على المجال $]-1 ; +\infty[$: $f(x)-(x+1)=\dfrac{x}{x^2-1}$

x	-1		0		1	+∞
x		−	0	+		+
x^2-1			−			+
$\dfrac{x}{x^2-1}$		+	0	−		+

لما $x\in]-1 ; 0[\cup]1 ; +\infty[$: $f(x)-(x+1)>0$ إذن (C) فوق (Δ)

لما $x=0$: $f(x)-(x+1)=0$ إذن (C) يقطع (Δ)

لما $x\in]0 ; 1[$: $f(x)-(x+1)<0$ إذن (C) تحت (Δ)

على المجال $]-\infty ; -1[$: $f(x)-(-x-1)=\dfrac{x}{x^2-1}$

x	−∞		-1
x		−	
x^2-1		+	
$\dfrac{x}{x^2-1}$		−	

لما $x\in]-\infty ; -1[$: $f(x)-(-x-1)<0$ إذن (C) تحت (Δ')

5 ــ من جدول تغيرات الدالة f نستنتج مايلي :

f مستمرة على $]-1 ; 1[$

f متناقصة تماما على $]-1 ; 1[$

f تأخذ قيم موجبة ثم قيم سالبة إذن تمر بالعدد 0 .

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-1 ; 1[$ حيث $f(\alpha)=0$

القسمة في Z

1 ـ قابلية القسمة في Z

تعريف : a و b عددان صحيحان حيث a غير معدوم .
نقول أن a يقسم b إذا و فقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $b = a\,k$ (نقول أيضا أن a قاسم لـــ b و أن b مضاعف لـــ a)

إذا كان a يقسم b نكتب $a|_b$ و نقرأ a يقسم b

أمثلة : $6|_{48}$ ؛ $-8|_{48}$ ؛ $4|_{-48}$ ؛ $-2|_{-48}$

ملاحظة : إذا كان $a|_b$ في Z فإن $-a|_b$ إذن b و (- b) لهما نفس القواسم

خواص :
a و b عددان صحيحان حيث $a \neq 0$
(1) إذا كان $a|_b$ فإن من أجل كل عدد صحيح m : $a|_{m\,b}$

(2) إذا كان $a|_b$ فإن من أجل كل عدد صحيح غير معدوم m : $m\,a|_{m\,b}$

نشاط ــ 1
عين الأعداد الصحيحة n حيث 11 يقسم (n + 5)

الحـــل ــ 1
$11|_{n+5}$ إذا و فقط إذا وجد $k \in Z$ حيث : $n + 5 = 11\,k$ أي $n = 11\,k - 5$

نتيجة : الأعداد الصحيحة n حيث $11|_{n+5}$ هي كل الأعداد الصحيحة التي تكتب من الشكل $n = 11\,k - 5$ حيث $k \in Z$

نشاط ــ 2
عين الأعداد الصحيحة n حيث العدد 3 n + 5 يقسم 8

الحـــل ــ 2
نعلم أن قواسم 8 هي $\{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; -1 ; -2 ; -4 ; -8\}$

إذن : يكون $3n+5|_8$ إذا و فقط إذا كان $3n+5 = 1$ أو $3n+5 = 2$ أو $3n+5 = 4$ أو $3n+5 = 8$ أو $3n+5 = -1$ أو $3n+5 = -2$ أو $3n+5 = -4$ أو $3n+5 = -8$

أي $n = \frac{1-5}{3}$ أو $n = \frac{2-5}{3}$ أو $n = \frac{4-5}{3}$ أو $n = \frac{8-5}{3}$ أو $n = \frac{-1-5}{3}$ أو $n = \frac{-2-5}{3}$ أو $n = \frac{-4-5}{3}$ أو $n = \frac{-8-5}{3}$

أي $n = -4/3$ (مرفوض) أو $n = -1$ أو $n = -1/3$ (مرفوض) أو $n = 1$ أو $n = -2$ أو $n = -7/3$ (مرفوض) أو $n = -3$

نتيجة : يكون $3n+5|_8$ إذا و فقط إذا كان $n \in \{-1 ; 1 ; -2 ; -3\}$

نشاط ــ 3
عين مجموعة الأعداد الصحيحة n حيث $3n+8|_{n+6}$

الحـــل ــ 3
$3n+8|_{n+6}$ إذن : $3n+8|_{3(n+6)}$ أي $3n+8|_{3n+18}$

لدينا : $3n+8|_{3n+8}$ لأن $3n+8 = 1(3n+8)$ .... (1)

و $3n+8|_{3n+18}$ إذن : $3n+18 = k'(3n+8)$ حيث $k' \in Z$ .... (2)

بطرح (1) من (2) نحصل على : $3n+18-(3n+8) = k'(3n+8)-(3n+8)$

أي : $10 = (k' - 1)(3n + 8)$

أي : $3n + 8 \mid 10$

منه : $3n + 8 \in \{1 ; 2 ; 5 ; 10 ; -1 ; -2 ; -5 ; -10\}$

$3n + 8 = 1$ إذن $n = -7/3$ مرفوض　　$3n + 8 = -1$ إذن $n = -3$

$3n + 8 = 2$ إذن $n = -2$　　$3n + 8 = -2$ إذن $n = -10/3$ مرفوض

$3n + 8 = 5$ إذن $n = -1$　　$3n + 8 = -5$ إذن $n = -13/3$ مرفوض

$3n + 8 = 10$ إذن $n = 2/3$ مرفوض　　$3n + 8 = -10$ إذن $n = -6$

نتيجة : يكون $3n + 8 \mid n + 6$ إذا و فقط إذا كان $n \in \{-2 ; -1 ; -3 ; -6\}$

خاصية أساسية :

a ، b ، c أعداد صحيحة حيث $a \neq 0$

إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$ فإن $a \mid bm + cn$ حيث n و m أعداد صحيحة كيفية

مثال : n عدد صحيح . نضع $\begin{cases} a = 5n - 2 \\ b = 2n + 3 \end{cases}$

أثبت أن كل قاسم مشترك لـــ a و b هو قاسم أيضا للعدد 19

الحـــل : ليكن k قاسم مشترك لـــ a و b إذن : $\begin{cases} k \mid 5n - 2 \\ k \mid 2n + 3 \end{cases}$

منه : حسب الخاصية الأساسية : $k \mid 2(5n - 2) + (-5)(2n + 3)$

أي : $k \mid 10n - 4 - 10n - 15$

أي : $k \mid -19$ منه $k \mid 19$ و هو المطلوب

نشاط : عين الأعداد الصحيحة a و b حيث $4a^2 - b^2 = 15$

الحـــل : $4a^2 - b^2 = 15$ أي $(2a - b)(2a + b) = 15$

منه : $(2a - b)(2a + b) = 1 \times 15$ أو $(2a - b)(2a + b) = 3 \times 5$ أو $(2a - b)(2a + b) = 5 \times 3$ أو $(2a - b)(2a + b) = 15 \times 1$

أي : $\begin{cases} 2a - b = 1 \\ 2a + b = 15 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2a - b = 3 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2a - b = 5 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2a - b = 15 \\ 2a + b = 1 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} 4a = 16 \\ b = 15 - 2a \end{cases}$ أو $\begin{cases} 4a = 8 \\ b = 5 - 2a \end{cases}$ أو $\begin{cases} 4a = 8 \\ b = 3 - 2a \end{cases}$ أو $\begin{cases} 4a = 16 \\ b = 1 - 2a \end{cases}$

أي : $a = 4$ ؛ $b = 7$ أو $a = 2$ ؛ $b = 1$ أو $a = 2$ ؛ $b = -1$ أو $a = 4$ ؛ $b = -7$

منه $(a ; b) \in \{(4 ; 7) ; (2 ; 1) ; (2 ; -1) ; (4 ; -7)\}$

نتيجة : مجموعة الثنائيات المرتبة $(a ; b)$ من Z^2 حيث $4a^2 - b^2 = 15$ هي :

$\{(4 ; 7) ; (2 ; 1) ; (2 ; -1) ; (4 ; -7) ; (-4 ; -7) ; (-2 ; -1) ; (-2 ; 1) ; (-4 ; 7)\}$

ملاحظة : الحلول الأربعة الأخرى ناتجة بضرب العددين a و b في (1 -) لأن العدد 15 يكتب أيضا من الشكل -1×-15 أو -3×-5 أو -5×-3 أو -15×-1 و عليه كل جمل المعادلات السابقة تضرب في (1 -)

2 ـــ القسمة الإقليدية في Z

مبرهنة :

a عدد صحيح و b عدد طبيعي غير معدوم

توجد ثنائية مرتبة و حيدة $(q ; r)$ من $Z \times N$ حيث $a = bq + r$ و $0 \leq r < b$

عملية البحث عن الثنائية الوحيدة $(q ; r)$ تسمى القسمة الإقليدية في Z

العدد a يسمى حاصل هذه القسمة الإقليدية و r يسمى باقي القسمة الإقليدية

مثال : a عدد صحيح باقي قسمته على 10 هو 6 . عين باقي قسمة a على 5

الحـل : باقي قسمة a على 10 هو 6 إلى $a = 10\,q + 6$ حيث $q \in Z$

منه : $a = 2 \times 5\,q + 5 + 1$

أي : $a = 5(2\,q + 1) + 1$

نضع $q' = 2\,q + 1$ إذن $q' \in Z$

منه : $a = 5\,q' + 1$

إذن : باقي قسمة a على 5 هو 1

القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين

a و b عددان طبيعيان غير معدومان .

نرمز بـــ D_a و D_b إلى مجوعات قواسم العددين a و b على الترتيب .

تعريف :

أكبر عنصر من المجموعة $D_b \cap D_a$ يسمى القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b و نرمز له بـــ $PGCD(a\,;b)$

ملاحظة : PGCD يعني : أكبر قاسم مشترك (Plus Grand Commun Diviseur)

حذار ! $D_0 = N^*$ (قواسم 0 هي كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة)

مثال :

$D_{12} = \{1\,;2\,;3\,;4\,;6\,;12\}$

$D_{32} = \{1\,;2\,;4\,;8\,;16\,;32\}$

$D_{12} \cap D_{32} = \{1\,;2\,;4\}$

$PGCD(12\,;32) = 4$

خواص :

الخاصية (1) : a و b عددان طبيعيان غير معدومين . حيث $a \geq b$

إذا كان r هو باقي القسمة الإقليدية لـــ a على b فإن $PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r)$

نتيجة مباشرة : (خوارزمية إقليدس)

مثال : لنبحث عن $PGCD(32\,;12)$ كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 32 & 12 \\ \hline -24 & 2 \\ 8 & \end{array}$$

إذن : حسب الخاصية (1) $PGCD(32\,;12) = PGCD(12\,;8)$

$$\begin{array}{r|l} 12 & 8 \\ \hline -08 & 1 \\ 4 & \end{array}$$

إذن : $PGCD(12\,;8) = PGCD(8\,;4)$

$$\begin{array}{r|l} 8 & 4 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

إذن : $PGCD(8\,;4) = 4$

نتيجة : $PGCD(32\,;12) = PGCD(12\,;8) = PGCD(8\,;4) = 4$

هذه الطريقة للبحث عن القاسم المشترك الأكبر تسمى خوارزمية إقليدس

إذن : القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هوآخر باقي قسمة غير معدوم من عمليات القسمة في خوارزمية إقليدس :

نشاط : باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD(150\,;108)$

إستنتج ثنائية $(x\,;y)$ من $Z \times Z$ حيث $150\,x + 108\,y = 6$

الحـل :

$$\begin{array}{r|l} 150 & 108 \\ \hline 108 & 1 \\ 42 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 108 & 42 \\ \hline 84 & 2 \\ 24 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 42 & 24 \\ \hline 24 & 1 \\ 18 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 24 & 18 \\ \hline 18 & 1 \\ 6 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 6 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

الباقي الأول   الباقي الثاني   الباقي الثالث   الباقي الرابع

نتيجة : آخر باقي غير معدوم هو الباقي الرابع الذي يساوي 6

إذن : $PGCD(150\,;108) = 6$

حسب عمليات القسمة المتتالية من خوارزية إقليدس السابقة نستنتج الكتابات التالية للبواقي :

$150 - (108)\,1 = 42$ .... (1)

$108 - (42)\,2 = 24$ .... (2)

$42 - (24)\,1 = 18$ .... (3)

$24 - (18)\,1 = 6$ .... (4)

نعوض 18 في المساواة (4) : $24 - [42 - 24(1)] = 6$

أي $24 - 42 + 24 = 6$

أي $- 42 + 24(2) = 6$ .... (5)

نعوض كل من (2) و (1) في المساواة (5) نحصل على :

$- [150 - 108] + [108 - 42(2)](2) = 6$

أي $- 150 + 108 + 108(2) - 42(4) = 6$

أي $- 150 + 108(3) - 42(4) = 6$ .... (6)

نعوض (1) في (6) نحصل على :

$- 150 + 108(3) - 4[150 - 108] = 6$

أي $- 150 + 108(3) - 150(4) + 108(4) = 6$

أي $150(- 5) + 108(7) = 6$ و هو المطلوب

إذن : الثنائية $(x ; y)$ المطلوبة هي $(- 5 ; 7)$

الخاصية (2) : a و b عددان طبيعيان غير معدومان .

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k فإن $PGCD(k\,a ; k\,b) = k \times PGCD(a ; b)$

تمديد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين

إذا كان a و b عددان صحيحان غير معدومان فإن $PGCD(a ; b) = PGCD(|a| ; |b|)$

إذن : من أجل كل ثلاث أعداد صحيحة غير معدومة $k ; c ; a$ فإن :

$$PGCD(k\,a ; k\,b) = |k|\,PGCD(a ; b)$$

الأعداد الأولية فيما بينها

تعريف : a ؛ b عددان طبيعيان غير معدومين .

نقول أن a و b أوليان فيما بينهما إذا و فقط إذا كان $PGCD(a ; b) = 1$

نتيجة : $b' ; a' ; d ; b ; a$ أعداد طبيعية غير معدومة

إذا كان $a = d\,a'$ و $b = d\,b'$ و $PGCD(a' ; b') = 1$ فإن $PGCD(a ; b) = d$

و العكس صحيح إذا كان $PGCD(a ; b) = d$ و $a = d\,a'$ و $b = d\,b'$ فإن $PGCD(a' ; b') = 1$

مثال : عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من $N^* \times N^*$ حيث : $\begin{cases} a + b = 66 \\ PGCD(a ; b) = 6 \end{cases}$

__الحــل :__

$PGCD(a ; b) = 6$ إذن : $\begin{cases} a = 6\,a' \\ b = 6\,b' \\ PGCD(a' ; b') = 1 \end{cases}$

منه : المساواة $a + b = 66$ تصبح $6\,a' + 6\,b' = 66$

أي $a' + b' = 11$

إذن نميز الحالات التالية :

a'	b'	PGCD(a' ; b')	a = 6 a'	b = 6 b'
1	10	1	6	60
2	9	1	12	54
3	8	1	18	48
4	7	1	24	42
5	6	1	30	36
6	5	1	36	30
7	4	1	42	24
8	3	1	48	18
9	2	1	54	12
10	1	1	60	6

نتيجة : الثنائيات المطلوبة هي : $\{(6 ; 60) ; (12 ; 54) ; (18 ; 48) ; (24 ; 42) ; (30 ; 36) ; (36 ; 30) ; (42 ;24) ;$
$(48 ; 18) ; (54 ; 12) ; (60 ; 6)\}$

نشاط :

1 ــ أنشر العبارة $(n+3)(3n^2-9n+16)$ حيث $n \in N$

2 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $3n^3-11n+48$ قابل للقسمة على $n+3$

3 ــ بين أن من أجل كل $n \in N$: $3n^2-9n+16$ هو عدد طبيعي غير معدوم

4 ــ بين أن من أجل كل الأعداد الطبيعية غير المعدومة $a ; b ; c$ فإن :

$$PGCD(a ; b) = PGCD(bc-a ; b)$$

5 ــ بين أن من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من 1 فإن :

$$PGCD(3n^3-11n ; n+3) = PGCD(48 ; n+3)$$

6 ــ عين مجموعة القواسم الطبيعية للعدد 48

7 ــ إستنتج مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $A = \dfrac{3n^3-11n}{n+3}$ عدد طبيعي

الحل :

1 ــ

$$(n+3)(3n^2-9n+16) = 3n^3-9n^2+16n+9n^2-27n+48$$
$$= 3n^3-11n+48$$

2 ــ لدينا $n \in N$ إذن : $(n+3) \in N$ و $(3n^2-9n+16) \in Z$

إذن : $(n+3)(3n^2-9n+16) = 3n^3-11n+48$ معناه $(n+3) \mid 3n^3-11n+48$

أي : العدد $3n^3-11n+48$ قابل للقسمة على $(n+3)$

3 ــ لدينا $n \in N$ إذن : $3n^2-9n+16 \in Z$ إذن : يكفي أن نبرهن أن $3n^2-9n+16 > 0$

لندرس إشارة كثير الحدود $p(x) = 3x^2-9x+16$ على R

$$\Delta = 81-4(3)(16) = 81-192 = -111$$

إذن : من أجل كل x من R : $p(x) > 0$

منه : $3n^2-9n+16 > 0$ من أجل كل n من N

إذن : $3n^2-9n+16 \in N^*$

4 ــ ليكن d قاسم مشترك لـ a و b

$\left.\begin{matrix} d \mid a \\ d \mid b \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} d \mid -a \\ d \mid cb \end{matrix}\right\}$ إذن : $d \mid cb-a$ .... (1)

ليكن الآن d قاسم مشترك لـ b و $cb-a$

$\left.\begin{matrix} d \mid b \\ d \mid bc-a \end{matrix}\right\}$ إذن : $\left.\begin{matrix} d \mid bc \\ d \mid -bc+a \end{matrix}\right\}$ منه : $d \mid bc-bc+a$ أي $d \mid a$ .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $PGCD(a ; b) = PGCD(bc-a ; b)$

5 ــ باستعمال نتيجة السؤال (4) من أجل $\left.\begin{matrix} a = 48 \\ b = n+3 \\ c = 3n^2-9n+16 \end{matrix}\right\}$ نحصل على :

$$PGCD(48 ; n+3) = PGCD((n+3)(3n^2-9n+16)-48 ; n+3)$$

أي : $PGCD(48 ; n+3) = PGCD(3n^3-11n+48-48 ; n+3)$

أي $PGCD(48 ; n+3) = PGCD(3n^3-11n ; n+3)$ و هو المطلوب .

6 ــ قواسم 48 هي : $D_{48} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 48\}$

7 ــ يكون $A \in N$ إذا و فقط إذا كان $n+3 \mid 3n^3-11n$ أي $PGCD(3n^3-11n ; n+3) = n+3$

أي $PGCD(48 ; n+3) = n+3$

أي $n+3 \mid 48$

أي $n+3 \in D_{48}$

منه : $n \in \{0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 9 ; 13 ; 21 ; 45\}$

لكن $n > 1$ إذن : $n \in \{3 ; 5 ; 9 ; 13 ; 21 ; 45\}$

مبرهنة بيزو :
يكون عددان صحيحان a و b أوليان فيما بينهما إذا و فقط إذا وجدت ثنائية $(\alpha ; \beta)$ من الأعداد الصحيحة حيث $\alpha a + \beta b = 1$

مثال : $a = 5$ ؛ $b = 3$

$$5(-4) + 3(7) = -20 + 21 = 1$$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha ; \beta) = (-4 ; 7)$ تحقق $5\alpha + 3\beta = 1$

إذن : 5 و 3 أوليان فيما بينهما .

تمارين الكتاب المدرسي

التمرين — 1

عين مجموعة القواسم الطبيعية للأعداد 24 و 75 و 20

الحــل — 1

$$D_{24} = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$$
$$D_{75} = \{1 ; 3 ; 5 ; 15 ; 25 ; 75\}$$
$$D_{20} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 20\}$$

التمرين — 2

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من $N \times N$ حيث $a b = 39$

الحــل — 2

لدينا : $D_{39} = \{1 ; 3 ; 13 ; 39\}$

إذن : $\begin{cases} a = 1 \text{ و } b = 39 \\ a = 3 \text{ و } b = 13 \\ a = 13 \text{ و } b = 3 \\ a = 39 \text{ و } b = 1 \end{cases}$ (أو)

منه : $(a ; b) \in \{(1 ; 39) ; (3 ; 13) ; (13 ; 3) ; (39 ; 1)\}$

التمرين — 3

عين كل الثنائيات $(x ; y)$ من الأعداد الصحيحة حيث $x^2 - y^2 = 15$

الحــل — 3

لدينا مجموعة القواسم الصحيحة للعدد 15 هي : $D_{15} = \{1 ; 3 ; 5 ; 15 ; -1 ; -3 ; -5 ; -15\}$

لدينا أيضا : $x^2 - y^2 = 15 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 15$

إذن :
$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 15 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x - 1 = 3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x - y = 15 \\ x + y = 1 \end{cases}$

أو $\begin{cases} x - y = -1 \\ x + y = -15 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + y = -5 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x - y = -5 \\ x + y = -3 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x - y = -15 \\ x + y = -1 \end{cases}$

أي :
$\begin{cases} 2x = 16 \\ y = 15 - x \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x = 8 \\ y = 5 - x \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x = 8 \\ y = 3 - x \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x = 16 \\ y = 1 - x \end{cases}$

أو $\begin{cases} 2x = -16 \\ y = -15 - x \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x = -8 \\ y = -5 - x \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x = -8 \\ y = -3 - x \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x = -16 \\ y = -1 - x \end{cases}$

أي :
$\begin{cases} x = 8 \\ y = 7 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = 8 \\ y = -7 \end{cases}$

أو $\begin{cases} x = -8 \\ y = -7 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} x = -8 \\ y = 7 \end{cases}$

نتيجة : الثنائيات هي : $\{(8 ; 7) ; (4 ; 1) ; (4 ; -1) ; (8 ; -7) ; (-8 ; -7) ; (-4 ; -1) ; (-4 ; 1) ; (-8 ; 7)\}$

التمرين ــ 4

1 ــ أنشر العبارة $(x-2)(y-3)$

2 ــ إستنتج الثنائيات $(x ; y)$ من $Z \times Z$ التي تحقق $xy = 3x + 2y$

الحـل ــ 4

1 ــ $(x-2)(y-3) = xy - 3x - 2y + 6$

2 ــ حسب السؤال (1) : $(x-2)(y-3) = xy - 3x - 2y + 6$

أي : $(x-2)(y-3) = xy - (3x+2y) + 6$

منه : إذا كان $xy = 3x + 2y$ فإن $(x-2)(y-3) = 6$ لأن $xy - (3x+2y) = 0$

أي : $x - 2 = 1$ و $y - 3 = 6$
أو $x - 2 = 2$ و $y - 3 = 3$
أو $x - 2 = 3$ و $y - 3 = 2$
أو $x - 2 = 6$ و $y - 3 = 1$
أو $x - 2 = -1$ و $y - 3 = -6$
أو $x - 2 = -2$ و $y - 3 = -3$
أو $x - 2 = -3$ و $y - 3 = -2$
أو $x - 2 = -6$ و $y - 3 = -1$

أي : $(x ; y) \in \{(3 ; 9) ; (4 ; 6) ; (5 ; 5) ; (8 ; 4) ; (1 ; -3) ; (0 ; 0) ; (-1 ; 1) ; (-4 ; 2)\}$

التمرين ــ 5

حل في Z^2 المعادلة $x^2 = 4y^2 + 3$

الحـل ــ 5

$$x^2 = 4y^2 + 3 \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 3$$
$$\Leftrightarrow (x - 2y)(x + 2y) = 3$$

$\Leftrightarrow$ $x + 2y = 3$ و $x - 2y = 1$
أو $x + 2y = 1$ و $x - 2y = 3$
أو $x + 2y = -3$ و $x - 2y = -1$
أو $x + 2y = -1$ و $x - 2y = -3$

$\Leftrightarrow$ $y = 1/2$ و $x = 2$ مرفوض
أو $y = -1/2$ و $x = 2$ مرفوض
أو $y = -1/2$ و $x = -2$ مرفوض
أو $y = 1/2$ و $x = -2$ مرفوض

نتيجة : المعادلة $x^2 = 4y^2 + 3$ لا تقبل حلولا في Z^2

التمرين ــ 6

حل في Z^2 المعادلة $5xy - y^2 = 49$

الحـل ــ 6

$$5xy - y^2 = 49 \Leftrightarrow y(5x - y) = 49$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \text{ و } 5x - y = 49 \\ \text{أو} \\ y = 7 \text{ و } 5x - y = 7 \text{ مرفوض} \\ \text{أو} \\ y = 49 \text{ و } 5x - y = 1 \\ \text{أو} \\ y = -1 \text{ و } 5x - y = -49 \\ \text{أو} \\ y = -7 \text{ و } 5x - y = -7 \text{ مرفوض} \\ \text{أو} \\ y = -49 \text{ و } 5x - y = -1 \end{cases}$$

إذن : $(x ; y) \in \{(10 ; 1) ; (10 ; 49) ; (-10 ; -1) ; (-10 ; -49)\}$

التمرين ـــ 7

ماهي عدد مضاعفات العدد 53 و المحصورة بين 1027 - و 1112

الحـــل ـــ 7

ليكن x مضاعف 53 إذن : $x = 53k$ حيث $k \in Z$

$-1027 \leq x \leq 1112$ إذن : $-1027 \leq 53k \leq 1112$

إذن : $\frac{-1027}{53} \leq k \leq \frac{1112}{53}$

أي $-19{,}37 \leq k \leq 20{,}98$

بما أن $k \in Z$ فإن عدد قيم k هو 40 (من 19 - إلى 20)

إذن : يوجد 40 مضاعف للعدد 53 محصور بين 1027 - و 1112

التمرين ـــ 8

عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة a حيث 7 قاسم لـــ a و $a < 50$

الحـــل ـــ 8

a هو مضاعف 7 الأصغر من 50 و الأكبر من 0

إذن : $a \in \{7 ; 14 ; 21 ; 28 ; 35 ; 42 ; 49\}$

التمرين ـــ 9

ماهي الكسور المساوية لـــ $\frac{33}{21}$ و التي مقام كل منها عدد طبيعي أصغر تماما من 50

الحـــل ـــ 9

ليكن $\frac{x}{y}$ هذا الكسر حيث $0 < y < 50$

لدينا : $\frac{x}{y} = \frac{33}{21}$ منه : $21x = 33y$

أي : $7x = 11y$

منه : $x = 11\alpha$ و $y = 7\alpha$ حيث $\alpha \in N^*$

لدينا : $\left.\begin{matrix} 0 < y < 50 \\ y = 7\alpha \end{matrix}\right\}$ إذن : $0 < 7\alpha < 50$

منه $0 < \alpha < 50/7$

أي : $0 < \alpha < 7{,}1$

أي : $\alpha \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7\}$

منه : $y \in \{7 ; 14 ; 21 ; 28 ; 35 ; 42 ; 49\}$

إذن : $x \in \{11 ; 22 ; 33 ; 44 ; 55 ; 66 ; 77\}$

نتيجة :

$$\frac{33}{21} = \frac{11}{7} = \frac{22}{14} = \frac{44}{28} = \frac{55}{35} = \frac{66}{42} = \frac{77}{49}$$

التمرين ـــ 10

عين كل الأعداد الصحيحة n التي من أجلها 13 قاسم لـــ $n + 4$ و $|n| \leq 22$

الحـل – 10

$|n| \leq 22$ إذن : $-22 \leq n \leq 22$

منه $-18 \leq n + 4 \leq 26$

إذن : نبحث عن مضاعفات 13 المحصورة بين 18 - و 26

منه $(n + 4) \in \{-13 ; 0 ; 13 ; 26\}$

أي : $n \in \{-17 ; -4 ; 9 ; 22\}$

التمرين – 11

عين كل الأعداد الصحيحة n حتى يكون $5n + 7$ قاسما لـ 12

الحـل – 11

$5n + 7$ قاسم لـ 12 إذن : $(5n + 7) \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12 ; -1 ; -2 ; -3 ; -4 ; -6 ; -12\}$

منه $5n \in \{-6 ; -5 ; -4 ; -3 ; -1 ; 5 ; -8 ; -9 ; -10 ; -11 ; -13 ; -19\}$

أي $n \in \{-1 ; 1 ; -2\}$

التمرين – 12

عين الأعداد الطبيعية n غير المعدومة حيث يكون العدد $n + 6$ قابلا للقسمة على n

الحـل – 12

يكون $n + 6$ قابلا للقسمة على n إذا و فقط إذا وجد k من N حيث $n + 6 = nk$

أي : $nk - n = 6$ منه $n(k-1) = 6$

أي $n | 6$

أي : $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 6\}$

التمرين – 13

1 – عين الأعداد الصحيحة n حيث يكون $5n + 6$ يقسم 34

2 – عين الأعداد الصحيحة n التي من أجلها $5n + 6$ قاسم لـ $n + 8$

الحـل – 13

1 –

$$5n + 6 | 34 \Rightarrow 5n + 6 \in \{1 ; 2 ; 17 ; 34 ; -1 ; -2 ; -17 ; -34\}$$
$$\Rightarrow 5n \in \{-5 ; -4 ; 11 ; 28 ; -7 ; -8 ; -23 ; -40\}$$
$$\Rightarrow n \in \{-1 ; -8\}$$

2 –

$$5n + 6 | n + 8 \Rightarrow 5n + 6 | 5(n + 8)$$
$$\Rightarrow 5n + 6 | 5n + 40$$

باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 5n + 40 & 5n + 6 \\ \underline{5n + 6} & 1 \\ 34 & \end{array}$$

إذن : $5n + 40 = 1 + \dfrac{34}{5n + 6}$

منه : يكون $5n + 6$ قاسم لـ $5n + 40$ إذا و فقط إذا كان $5n + 6 | 34$

أي $n \in \{-1 ; -8\}$ حسب السؤال (1)

التمرين – 14

n عدد صحيح . نضع $a = 3n + 7$ و $b = n + 1$

أثبت أن إذا كان d قاسم لـ a و قاسم لـ b فإن d قاسم للعدد 4

الحـل – 14

$$\begin{cases} d | a \\ d | b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d | a \\ d | 3b \end{cases} \Rightarrow d | a - 3b \Rightarrow d | 3n + 7 - (3n + 3) \Rightarrow d | 4$$

التمرين – 15

n عدد صحيح . نضع $x = 3n + 7$ و $y = 7n + 2$

أثبت أن إذا كان Δ قاسم لـ x و y فإن Δ قاسم لـ 43

الحــل – 15

$$\begin{cases}\Delta|x\\ \Delta|y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\Delta|7x\\ \Delta|3y\end{cases} \Rightarrow \Delta|7x-3y \Rightarrow \Delta|7(3n+7)-3(7n+2) \Rightarrow \Delta|49-6 \Rightarrow \Delta|43$$

التمرين – 16

ليكن a و b عددان صحيحان .

برهن أن إذا كان 2 يقسم a^2+b^2 فإن 2 يقسم $(a+b)^2$

الحــل – 16

a يقسم a^2+b^2 إذن : يوجد k من Z حيث $a^2+b^2=2k$

منه : $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 2k+2ab = 2(k+ab)$

أي 2 يقسم $(a+b)^2$

التمرين – 17

a و b عددان صحيحان

1 – أنشر العبارة $(a+b)^3$

2 – أثبت أن إذا كان 3 يقسم a^3+b^3 فإن 3 يقسم $(a+b)^3$

الحــل – 17

1 –

$$(a+b)^3 = (a+b)(a^2+b^2+2ab)$$
$$= a^3+ab^2+2a^2b+ba^2+b^3+2ab^2$$
$$= a^3+b^3+3ab^2+3a^2b$$

2 – إذا كان 3 يقسم a^3+b^3 فإن يوجد k من Z حيث $a^3+b^3=3k$

منه : $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab^2+3a^2b$

أي : $(a+b)^3 = 3k+3ab^2+3a^2b$ لأن $a^3+b^3=3k$

أي : $(a+b)^3 = 3(k+ab^2+a^2b)$

أي : 3 يقسم $(a+b)^3$

التمرين – 18

عين باقي القسمة الإقليدية لــ a على b في الحالات التالية :

1 – $a=118$ و $b=5$

2 – $a=-152$ و $7=b$

الحــل – 18

1 –

118	5
18	23
3	

إذن : باقي القسمة الإقليدية لــ 118 على 5 هو 3

2 –

152	7
12	21
5	

منه : $152 = 7(21)+5$

أي : $-152 = 7(-21)-5$

أي : $-152 = 7(-21)-5+7-7$

أي : $-152 = 7(-22)+2$

منه : باقي القسمة الإقليدية لــ -152 على 7 هو 2

التمرين – 19

عين كل الأعداد الطبيعية n الأصغر من 100 و التي باقي قسمتها على 41 هو 5

الحــل – 19

باقي قسمة n على 41 هو 5 إذن : $n=41k+5$ حيث $k\in N$

$n\le 100$ منه $41k+5\le 100$

أي $41k\le 95$

أي $k\le 95/41$

أي $k\in\{0;1;2\}$

نتيجة : $n\in\{5;46;87\}$ لأن $n=41k+5$

التمرين – 20

عين العددين الطبيعيين غير المعدومين a و b حيث حاصل القسمة الإقليدية لــ a على b هو 17 و باقيها هو 3 و $a-27=23b$

الحـل ـ 20

$$\begin{cases} a = 17b + 3 \\ a - 27 = 23b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - 17b = 3 \\ a - 23b = 27 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 17b - (a - 23b) = -24 \\ a = 17b + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6b = -24 \\ a = 17b + 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = -65 \end{cases}$$

إذن : لا يوجد عددان طبيعيان a و b يحققان الشروط المطلوبة .

التمرين ـ 21

n عدد طبيعي باقي قسمته على 7 يساوي باقي قسمته على 3 (القسمة الإقليدية)

عين القيم الممكنة لـ n

الحـل ـ 21

$\begin{cases} n = 7k + r \\ n = 3p + r \end{cases}$ حيث k و p و r أعداد طبيعية و $0 \le r < 3$

إذن $7k + r = 3p + r$ منه $7k = 3p$

إذن : $\begin{cases} k = 3q \\ P = 7q \end{cases}$ حيث q عدد طبيعي

نتيجة : قيم n المطلوبة هي الأعداد الطبيعية من الشكل $n = 7k + r = 7(3q) + r$

أي $n = 21q + r$ حيث $q \in N$ و $r \in \{0 ; 1 ; 2\}$

التمرين ـ 22

عين كل الأعداد الطبيعية n التي يكون باقي قسمتها على 7 و حاصل قسمتها على 7 متساويان .

الحـل ـ 22

ليكن q حاصل قسمة n على 7 و r باقي هذه القسمة

إذن : $n = 7q + r$ حيث $r \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

بما أن $q = r$ فإن $q \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

إذن : $n \in \{7(0) + 0 ; 7(1) + 1 ; 7(2) + 2 ; 7(3) + 3 ; 7(4) + 4 ; 7(5) + 5 ; 7(6) + 6\}$

أي : $n \in \{0 ; 8 ; 16 ; 24 ; 32 ; 40 ; 48\}$

التمرين ـ 23

عين كل الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها الحاصل هو ضعف الباقي عند القسمة الإقليدية لـ n على 13

الحـل ـ 23

ليكن $n = 13q + r$ حيث $q \in N$ و $r \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$

$q = 2r$ إذن : $q \in \{0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14 ; 16 ; 18 ; 20 ; 22 ; 24\}$

منه القيم الممكنة لـ n هي كما يلي :

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$q = 2r$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
$n = 13q + r$	0	27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	297	324

التمرين ـ 24

a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $a + b = 416$ و باقي القسمة الإقليدية لـ a على b هو 61 .

عين a و b

الحـل ـ 24

$\begin{cases} a + b = 416 \text{........(1)} \\ a = bq + 61 \text{........(2)} \end{cases}$ حيث $q \in N$

$$\begin{array}{r|l} 355 & 5 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$$

من العلاقة (1) : $a = 416 - b$

بالتعويض في (2) : $416 - b = b\,q + 61$

منه : $416 - 61 = b\,q + b$

أي : $355 = b(q + 1)$

منه : b قاسم لـ 355

إذن : $b \in \{1 ; 5 ; 71 ; 355\}$

منه : $(q + 1) \in \{355 ; 71 ; 5 ; 1\}$

أي : $q \in \{354 ; 70 ; 4 ; 0\}$

نتيجة : قيم a الممكنة هي :

q	354	70	4	0
b	1	5	71	355
$a = b\,q + 61$	415	411	345	61

مرفوض مرفوض

نتيجة : $(a ; b) \in \{(345 ; 71) ; (61 ; 355)\}$ لأن $b > 61$

التمرين ــ 25

باستعمال خوارزمية إقليدس عين $PGCD(a ; b)$ في الحالات التالية :

1 ــ $(a ; b) = (315 ; 117)$

2 ــ $(a ; b) = (1260 ; 528)$

الحـل ــ 25

1 ــ

$315 = 117 \times 2 + 81$ (234 ، 081) ؛ $117 = 81 \times 1 + 36$ ؛ $81 = 36 \times 2 + 09$ (72) ؛ $36 = 9 \times 4 + 0$

آخر باقي غير معدوم هو 9 إذن : $PGCD(315 ; 117) = 9$

2 ــ

$1260 = 528 \times 2 + 204$ (1056) ؛ $528 = 204 \times 2 + 120$ (408) ؛ $204 = 120 \times 1 + 84$ ؛ $120 = 84 \times 1 + 36$ ؛ $84 = 36 \times 2 + 12$ (72) ؛ $36 = 12 \times 3 + 0$

آخر باقي غير معدوم هو 12 إذن : $PGCD(1260 ; 528) = 12$

التمرين ــ 26

n عدد طبيعي غير معدوم

1 ــ ماهو القاسم المشترك الأكبر لـ n و 3 n ؟

2 ــ ماهو القاسم المشترك الأكبر لـ n و n^2 ؟

الحـل ــ 26

1 ــ n قاسم لـ 3 n إذن $PGCD(n ; 3\,n) = n$

2 ــ n قاسم لـ n^2 إذن $PGCD(n ; n^2) = n$

التمرين ــ 27

برهن أن مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b هي مجموعة قواسم العدد $PGCD(a ; b)$

الحـل ــ 27

لتكن D مجموعة القواسم المشتركة للعددين a و b

و لتكن d مجموعة قواسم العدد $PGCD(a ; b)$

ليكن k عنصر من D إذن : $k|a$ و $k|b$

نضع $q = PGCD(a ; b)$ إذن : $\begin{cases} a = q\,a' \\ b = q\,b' \end{cases}$ حيث $PGCD(a' ; b') = 1$

لدينا $\begin{cases} k|a'\,q \\ k|b'\,q \end{cases}$ إذن : $k|q$ لأن $PGCD(a' ; b') = 1$

منه : $k \in d$ .... (1)

ليكن الآن ℓ عنصر من d إذن : $\ell \mid q$

لكن $q \mid a$ و $q \mid b$

إذن : $\ell \mid a$ و $\ell \mid b$

إذن : $\ell \in D$ .... (2)

نتيجة : $D = d$ و هو المطلوب .

التمرين ــ 28

عين كل القواسم المشتركة للعددين 456 و 792

الحـل ــ 28

لنبحث عن $PGCD(792 ; 456)$ كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 792 & 456 \\ \hline 456 & 1 \\ \hline 336 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 456 & 336 \\ \hline 336 & 1 \\ \hline 120 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 336 & 120 \\ \hline 240 & 2 \\ \hline 96 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 120 & 96 \\ \hline 96 & 1 \\ \hline 24 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 96 & 24 \\ \hline 96 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

منه : $PGCD(792 ; 456) = 24$

إذن : مجموعة القواسم المشتركة للعددين 456 و 792 هي مجموعة قواسم العدد 24

و هي : $D = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24\}$

التمرين ــ 29

n عدد طبيعي غير معدوم حيث باقي القسمة الإقليدية لــ 4294 و 3521 على n هما على الترتيب 10 و 11 .
عين القيم الممكنة لــ n

الحـل ــ 29

البواقي هي 10 و 11 إذن : $n > 11$

لدينا : $\begin{cases} 4294 = n\,q + 10 \\ 3521 = n\,p + 11 \end{cases}$ حيث $q \in N^*$ و $p \in N^*$

إذن : $\begin{cases} 4284 = n\,p \\ 3510 = n\,q \end{cases}$

منه : $\begin{cases} n \mid 4284 \\ n \mid 3510 \end{cases}$ إذن : n قاسم مشترك للعددين 4284 و 3510

أي n ينتمي إلى مجموعة قواسم القاسم المشترك الأكبر للعددين 4284 و 3510 كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 4284 & 3510 \\ \hline 3510 & 1 \\ \hline 774 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 3510 & 774 \\ \hline 3096 & 4 \\ \hline 414 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 774 & 414 \\ \hline 414 & 1 \\ \hline 360 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 414 & 360 \\ \hline 360 & 1 \\ \hline 54 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 360 & 54 \\ \hline 324 & 6 \\ \hline 36 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 54 & 36 \\ \hline 36 & 1 \\ \hline 18 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 36 & 18 \\ \hline 36 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}$$

إذن : $PGCD(4284 ; 3510) = 18$

منه : $n \in \{1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18\}$

لكن $n > 11$ إذن $n = 18$

التمرين ــ 30

n عدد طبيعي مكون من أربعة أرقام
عين العدد n حيث 37 و 53 هما على الترتيب بواقي القسمة الإقليدية للعددين 21685 و 33509 على n

الحـل ــ 30

$\begin{cases} 21685 = n\,p + 37 \\ 33509 = n\,q + 53 \end{cases}$ حيث $p \in N$ ؛ $q \in N$ ؛ $n > 53$

إذن : $\left\{\begin{array}{l} 21648 = n\,p \\ 33456 = n\,q \end{array}\right.$ منه $\left.\begin{array}{l} n \mid 21648 \\ n \mid 33456 \end{array}\right\}$

إذن : n ينتمي إلى القواسم المشتركة للعددين 21648 و 33456

البحث عن $PGCD(21648\,;\,33456)$

$$\begin{array}{r|l} 33456 & 21648 \\ 21648 & 1 \\ \hline 11808 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 21648 & 11808 \\ 11808 & 1 \\ \hline 9840 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 11808 & 6840 \\ 9840 & 1 \\ \hline 1968 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 9840 & 1968 \\ 9840 & 5 \\ \hline 0 & \end{array}$$

نتيجة : $PGCD(21648\,;\,33456) = 1968$

إذن : n ينتمي إلى مجموعة قواسم 1968

لكن n يتكون من 4 أرقام إذن $n = 1968$ لأنه القاسم الوحيد لـ 1968 و الذي يتكون من 4 أرقام .

التمرين ــ 31

1 ــ عين $PGCD(182\,;\,126)$

2 ــ باستعمال خوارزمية إقليدس أوجد عددين صحيحين α و β حيث $182\,\alpha + 126\,\beta = 14$

الحـل ــ 31

1 ــ

$$\begin{array}{r|l} 182 & 126 \\ 126 & 1 \\ \hline 56 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 126 & 56 \\ 112 & 2 \\ \hline 14 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 56 & 14 \\ 56 & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$$

نتيجة : $PGCD(182\,;\,126) = 14$

2 ــ لنكتب بواقي قسمة خوارزمية إقليدس كما يلي :

$(1)\ldots\ldots\ldots\ 182 - 126(1) = 56$

$(2)\ldots\ldots\ldots\ 126 - 56(2) = 14$

نعوض (1) في (2) نحصل على :

$126 - 2[182 - 126(1)] = 14$ لأن $56 = 182 - 126(1)$

أي $126 - 182(2) + 126(2) = 14$

أي : $182(-2) + 126(3) = 14$

إذن : $(\alpha\,;\,\beta) = (-2\,;\,3)$

التمرين ــ 32

أحسب باقي قسمة العدد 1399 على 82 ثم إستنتج $PGCD(1399\,;\,82)$

الحـل ــ 32

$$\begin{array}{r|l} 1399 & 82 \\ 82 & 17 \\ \hline 579 & \\ 574 & \\ \hline 005 & \end{array}$$

نتيجة : باقي قسمة 1399 على 82 هو 5

إذن : $PGCD(1399\,;\,82) = PGCD(82\,;\,5)$

أي : $PGCD(1399\,;\,82) = 1$ لأن 82 و 5 أوليان فيما بينهما .

التمرين ــ 33

عين $PGCD(-350\,;\,-252)$

الحـل ــ 33

إذن : $PGCD(-350\,;\,-252) = PGCD(350\,;\,252)$

$$\begin{array}{r|l} 350 & 252 \\ 252 & 1 \\ \hline 98 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 252 & 98 \\ 196 & 2 \\ \hline 56 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 98 & 56 \\ 56 & 1 \\ \hline 42 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 56 & 42 \\ 42 & 1 \\ \hline 14 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 42 & 14 \\ 42 & 3 \\ \hline 0 & \end{array}$$

نتيجة : $PGCD(350\,;\,252) = 14$

إذن : $PGCD(-350\,;\,-252) = 14$

التمرين ــ 34

عين $PGCD(54\,;\,82)$ ثم إستنتج $PGCD(5400\,;\,8200)$

الحـل ـ 34

$$\begin{array}{r|l} 82 & 54 \\ \underline{54} & 1 \\ 28 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 54 & 28 \\ \underline{28} & 1 \\ 26 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 28 & 26 \\ \underline{26} & 1 \\ 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ \underline{26} & 13 \\ 0 & \end{array}$$

نتيجة : $PGCD(54 ; 82) = 2$

إذن :
$$PGCD(5400 ; 8200) = PGCD(54 \times 100 ; 82 \times 100) = 100 \times PGCD(54 ; 82) = 100 \times 2 = 200$$

التمرين ـ 35

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث $\begin{cases} a + b = 72 \\ PGCD(a ; b) = 9 \end{cases}$

الحـل ـ 35

$PGCD(a ; b) = 9$ إذن : $\begin{cases} a = 9x \\ b = 9y \end{cases}$ حيث $\begin{cases} y \in N \text{ ، } x \in N \\ PGCD(x ; y) = 1 \end{cases}$

لدينا $a + b = 72$ إذن : $9x + 9y = 72$

أي : $x + y = 8$

الحالات الممكنة :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	مرفوض		مرفوض		مرفوض		مرفوض		مرفوض

الحالات المرفوضة لا تحقق الشرط $PGCD(x ; y) = 1$

نتيجة : $(x ; y) \in \{(1 ; 7) ; (3 ; 5) ; (5 ; 3) ; (7 ; 1)\}$

منه : $(a ; b) \in \{(9 ; 63) ; (27 ; 45) ; (45 ; 27) ; (63 ; 9)\}$

التمرين ـ 36

عين الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث $\begin{cases} a\,b = 360 \\ PGCD(a ; b) = 6 \end{cases}$

الحـل ـ 36

$PGCD(a ; b) = 6$ إذن : $\begin{cases} a = 6x \\ b = 6y \end{cases}$ حيث $\begin{cases} y \in N^* ; x \in N^* \\ PGCD(x ; y) = 1 \end{cases}$

لدينا $a\,b = 360$ إذن : $6x \,.\, 6y = 360$ أي $x\,y = 10$

منه القيم الممكنة لـــ x و y كما يلي :

x	1	2	5	10
y	10	5	2	1

نتيجة : $(x ; y) \in \{(1 ; 10) ; (2 ; 5) ; (5 ; 2) ; (10 ; 1)\}$

منه : $(a ; b) \in \{(6 ; 60) ; (12 ; 30) ; (30 ; 12) ; (60 ; 6)\}$

التمرين ـ 37

عين الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية حيث $\begin{cases} a^2 - b^2 = 825 \\ PGCD(a ; b) = 5 \end{cases}$

الحـل ـ 37

$PGCD(a ; b) = 5$ إذن : $\begin{cases} a = 5x \\ b = 5y \end{cases}$ حيث $\begin{cases} y \in N^* ; x \in N^* \\ PGCD(x ; y) = 1 \end{cases}$

$a^2 - b^2 = 825$ إذن : $(a - b)(a + b) = 825$

أي $(5x - 5y)(5x + 5y) = 825$

أي $5 \times 5(x - y)(x + y) = 825$

أي : $(x - y)(x + y) = 33$

منه : $\begin{cases} x - y > 0 \\ (x - y)(x + y) = 33 \end{cases}$

أي $\begin{cases} x > y \\ (x-y)(x+y) = 33 \end{cases}$

منه القيم الممكنة لـ $(x-y)$ و $(x+y)$ هي كما يلي :

$x-y$	1	3	11	33
$x+y$	33	11	3	1
x	17	7	7	17
y	16	4	-4	-16

مرفوض مرفوض

ملاحظة : للبحث عن x و y نحل الجملة $\begin{cases} x-y=\alpha \\ x+y=\beta \end{cases}$ كما يلي : $2x = \alpha + \beta$

إذن : $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ منه : $y = x - \alpha$ إذن : $(x\,;y) \in \{(17\,;16)\,;(7\,;4)\}$

منه : $(a\,;b) \in \{(85\,;80)\,;(35\,;20)\}$

التمرين — 38

1 — عين $PGCD(140\,;143)$

2 — إستنتج $PGCD(a\,;b)$ في الحالات التالية :

$(a\,;b) = (140 \times 34\,;143 \times 34)$

$(a\,;b) = (143 \times 82\,;140 \times 82)$

الحل — 38

— 1

$$\begin{array}{r|l} 143 & 140 \\ 3 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 140 & 3 \\ 12 & 46 \\ 20 & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{array}$$

نتيجة : $PGCD(140\,;143) = 1$

— 2 $PGCD(140 \times 34\,;143 \times 34) = 34 \times PGCD(140\,;143) = 34$

$PGCD(143 \times 82\,;140 \times 82) = 82 \times PGCD(140\,;143) = 82$

التمرين — 39

أثبت أن لا يوجد عددان طبيعيان مجموعهما 500 و قاسمهما المشترك الأكبر هو 7

الحل — 39

لنفرض أنه يوجد عددين طبيعيين a و b حيث $\begin{cases} PGCD(a\,;b) = 7 \\ a+b = 500 \end{cases}$

$PGCD(a\,;b) = 7$ إذن $\begin{cases} a = 7x \\ b = 7y \end{cases}$ حيث $\begin{cases} y \in N^*\,;x \in N^* \\ PGCD(x\,;y) = 1 \end{cases}$

$a + b = 500$ إذن : $7x + 7y = 500$

أي $7(x+y) = 500$

لكن 7 لا يقسم 500 إذن تناقض.

منه : لا يوجد أي عددين طبيعيين a و b يحققان الشروط المطلوبة.

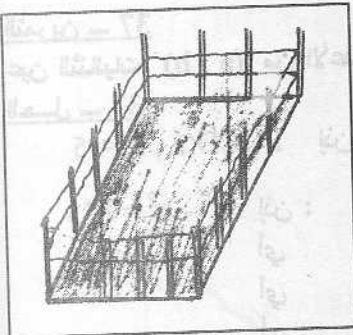
التمرين — 40

قطعة أرضية مستطيلة الشكل أبعادها $156\ m \times 90\ m$ كما هو في الشكل المقابل.
نريد إحاطتها بسياج على شكل أعمدة حديدية حيث نضع في كل زاوية عمود و المسافة بين كل عمودين متتاليين متساوية مثنى مثنى . (نفس المسافة على طول السياج).
إذا علمت أن المسافة بين كل وتدين هي عدد طبيعي n مقدر بالمتر حيث $2 < n < 5$.
أحسب عدد الأوتاد التي يمكن غرسها على محيط هذه القطعة الأرضية.

الحل — 40

بما أن المسافة بين وتدين متتاليين مثنى مثنى متساوية فإن العدد n يكون قاسم لـ 156 و قاسم لـ 90

لدينا $2 < n < 5$ إذن $n \in \{3\,;4\}$

بما أن 4 لا يقسم 90 فإن القيمة الوحيدة الممكنة لـ n هي 3

إذن : عدد الأعمدة المحاطة بالقطعة الأرضية هو كما يلي :

محيط القطعة : $p = 2(156 + 90) = 2(246) = 492$

إذن : عدد الأعمدة هو : $492/3 = 164$

التمرين ـــ 41

تسمي قاسما تاما للعدد الطبيعي n كل قاسم لـــ n موجب و يختلف عن n

تقول عن عددين طبيعيين غير معدومين a و b أنهما وديان إذا كان a هو مجموع كل القواسم التامة للعدد b و b هو مجموع كل القواسم التامة للعدد a .

برهن أن العددان 220 و 284 وديان

الحـل ـــ 41

لنبحث عن قواسم كل من 220 و 284 كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 220 & 2 \\ 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 284 & 2 \\ 142 & 2 \\ 71 & 71 \\ 1 & \end{array}$$

إذن : $D_{220} = \{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 44 ; 55 ; 110 ; 220\}$

$D_{284} = \{1 ; 2 ; 4 ; 71 ; 142 ; 284\}$

منه القواسم التامة لـــ 220 هي $\{1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 44 ; 55 ; 110\}$

و القواسم التامة لـــ 284 هي $\{1 ; 2 ; 4 ; 71 ; 142\}$

$$\begin{cases} 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284 \\ 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220 \end{cases}$$

إذن : فعلا العددان 220 و 284 وديان

التمرين ـــ 42

n عدد طبيعي أكبر تماما من 2

برهن أن : يكون $n + 5$ مضاعف لـــ $n - 2$ إذا و فقط إذا كان $n = 3$ أو $n = 9$

الحـل ـــ 42

لنبحث عن القاسم المشترك الأكبر لـــ $n + 5$ و $n - 2$ باستعمال خوارزمية إقليدس

$$\begin{array}{r|l} n + 5 & n - 2 \\ \underline{n - 2} & 1 \\ 7 & \end{array}$$

إذن : $PGCD(n + 5 ; n - 2) = PGCD(n - 2 ; 7)$

منه : $PGCD(n + 5 ; n - 2) \in \{1 ; 7\}$ لأن قواسم 7 هي $\{1 ; 7\}$

نتيجة : يكون $(n + 5)$ مضاعف لـــ $(n - 2)$ إذا و فقط إذا كان $PGCD(n + 5 ; n - 2) = n - 2$

أي : إذا و فقط إذا كان $n - 2 = 1$ أو $n - 2 = 7$

أي : إذا و فقط إذا كان $n = 3$ أو $n = 9$ و هو المطلوب

التمرين ـــ 43

1 ـــ أحسب مجموع قواسم العدد 8 ثم مجموع قواسم العدد 81

2 ـــ ماهو عدد قواسم العدد 81×8

الحـل ـــ 43

1 ـــ $D_8 = \{1 ; 2 ; 4 ; 8\}$ إذن : مجموع قواسم 8 هو $1 + 2 + 4 + 8 = 15$

$D_{81} = \{1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81\}$ إذن : مجموع قواسم 81 هو $1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121$

2 ـــ لنبحث عن عدد قواسم العدد 8×81

لدينا : $8 \times 81 = 2^3 \times 3^4$

إذن : قواسم العدد 8×81 تكتب من الشكل $2^n \times 3^p$ حيث $n \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ و $p \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

إذن : عدد قواسم العدد 8×81 هو $5 \times 4 = 20$

ملاحظة : يمكن البحث عن هذه القواسم كما يلي :

2^n	2^0					2^1					2^2					2^3				
3^p	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4
$2^n \times 3^p$	1	3	9	27	81	2	6	18	54	162	4	12	36	108	324	8	24	72	216	648

التمرين – 44

1 – كيف يمكن إختيار العدد الطبيعي n حتى يكون $\frac{n+2}{n-1}$ عددا صحيحا .

2 – عين الأعداد الطبيعية a حيث من بين قواسم العدد a قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 و عدد قواسم a^2 هو ثلاث مرات عدد قواسم العدد a

الحـــل – 44

1 – يكون العدد $\frac{n+2}{n-1}$ صحيحا إذا و فقط إذا كان $PGCD(n+2\,;\,n-1)=n-1$

باجراء خوارزمية إقليدس كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} n+2 & n-1 \\ \underline{n-1} & 1 \\ 3 & \end{array}$$

إذن : $PGCD(n+2\,;\,n-1)=PGCD(n-1\,;\,3)$

منه : $PGCD(n+2\,;\,n-1)\in\{1\,;\,3\}$ لأن قواسم 3 هي $\{1\,;\,3\}$

نتيجة : يكون $\frac{n+2}{n-1}$ صحيحا إذا و فقط إذا كان $n-1=1$ أو $n-1=3$ أي $n=2$ أو $n=4$

2 – a له قاسمين أوليين فقط هما 2 و 3 إذن : $a=2^n\times3^p$ حيث $n\in N^*$ و $p\in N^*$

إذن : عدد قواسم a هو $(n+1)(p+1)$

من جهة أخرى : $a^2=2^{2n}\times3^{2p}$

إذن : عدد قواسم a^2 هو $(2n+1)(2p+1)$

نتيجة : عدد قواسم a^2 هو 3 مرات عدد قواسم a إذن :

$$(2n+1)(2p+1)=3(n+1)(p+1)$$

أي : $4np+2n+2p+1=3np+3n+3p+3$

أي : $np-n-p=2$

أي : $np-n=p+2$

أي : $n(p-1)=p+2$

أي : $n=\frac{p+2}{p-1}$ حيث $p\neq1$

لكن : $n\in N^*$ إذن : $\left(\frac{p+2}{p-1}\right)\in N^*$

منه : حسب السؤال (1) فإن $p=2$ أو $p=4$

منه : $n=\frac{2+2}{2-1}=4$ أو $n=\frac{4+2}{4-1}=2$

إذن : $(n\,;\,p)\in\{(4\,;\,2)\,;\,(2\,;\,4)\}$

منه : $a=2^2\times3^4$ أو $a=2^4\times3^2$

التمرين – 45

عين كل الثنائيات $(x\,;\,y)$ من الأعداد الصحيحة التي تحقق : $xy-4y-12=0$

الحـــل – 45

$$xy-4y-12=0\Leftrightarrow xy-4y=12$$
$$\Leftrightarrow y(x-4)=12$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{12}{x-4}\quad \text{حيث } x\neq4$$

بما أن y عدد صحيح فإن $(x-4)$ هو قاسم لـــ 12

أي : $(x-4)\in\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,6\,;\,12\,;\,-1\,;\,-2\,;\,-3\,;\,-4\,;\,-6\,;\,-12\}$

منه : $x\in\{5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,10\,;\,16\,;\,3\,;\,2\,;\,1\,;\,0\,;\,-2\,;\,-8\}$

لدينا : $y=\frac{12}{x-4}$ إذن $y\in\{12;\,6\,;\,4\,;\,3\,;\,2\,;\,1\,;\,-12\,;\,-6\,;\,-4\,;\,-3\,;\,-2\,;\,-1\}$

نتيجة : $(x\,;\,y)\in\{(5\,;\,12)\,;\,(6\,;\,6)\,;\,(7\,;\,4)\,;\,(8\,;\,3)\,;\,(10\,;\,2)\,;\,(16\,;\,1)\,;\,(3\,;\,-12)\,;\,(2\,;\,-6)\,;\,(1\,;\,-4)\,;$
$(0\,;\,-3)\,;\,(-2\,;\,-2)\,;\,(-8\,;\,-1)\}$

التمرين – 46

في المستوي المنسوب إلى معلم نعتبر (C) منحنى الدالة f المعرفة على

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 3}{x - 1}$$ بـ $D = [-3 ; 1[\cup]1 ; 3]$

1 ــ عين العدد الحقيقي a حتى يكون من أجل كل x من D : $f(x) = 2x - 1 + \frac{a}{x - 1}$

2 ــ عين نقط المنحنى (C) التي إحداثياها أعداد صحيحة .

الحـل ــ 46

1 ــ باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 3x - 3 & x - 1 \\ \underline{2x^2 - 2x} & \overline{2x - 1} \\ -x - 3 & \\ \underline{-x + 1} & \\ -4 & \end{array}$$

إذن : $f(x) = 2x - 1 - \frac{4}{x - 1}$

أي $a = -4$

2 ــ لتكن $N(x ; y)$ نقطة من (C)

تكون إحداثيات N صحيحة إذا و فقط إذا كان : $x \in \{-3 ; -2 ; 0 ; 2 ; 3\}$

و $f(x) \in Z$ أي $\frac{4}{x-1} \in Z$ لأن $(2x - 1) \in Z$

منه : $(x - 1)$ يقسم 4

أي $(x - 1) \in \{1 ; 2 ; 4 ; -1 ; -2 ; -4\}$

أي : $x \in \{2 ; 3 ; 5 ; 0 ; -1 ; -3\}$

بالتقاطع مع المجموعة $\{-3 ; -2 ; 0 ; 2 ; 3\}$ نحصل على : $x \in \{-3 ; 0 ; 2 ; 3\}$

إذن : $y \in \{f(-3) ; f(0) ; f(2) ; f(3)\}$

أي : $y \in \{-6 ; 3 ; -1 ; 3\}$

إذن : النقط المطلوبة هي $\{N_1(-3 ; -6) ; N_2(0 ; 3) ; N_3(2 ; -1) ; N_4(3 ; 3)\}$

التمرين ــ 47

n عدد طبيعي . نضع $a = n(n^2 + 5)$

1 ــ برهن أن a عدد زوجي .

2 ــ برهن أن a مضاعف 3

الحـل ــ 47

1 ــ n عدد طبيعي إذن نميز حالتين :

الحالة الأولى : n زوجي منه : $n = 2p$ حيث $p \in N$

إذن : $a = 2p(n^2 + 5)$

منه : a زوجي .

الحالة الثانية : n فردي إذن : $n = 2p + 1$ حيث $p \in N$

منه : $a = n[(2p + 1)^2 + 5]$

أي $a = n(4p^2 + 4p + 1 + 5)$

أي $a = n(4p^2 + 4p + 6)$

أي $a = 2n(2p^2 + 2p + 3)$

منه : a زوجي .

نتيجة : من أجل كل n من N فإن العدد a زوجي .

2 ــ n عدد طبيعي إذن نميز الحالات التالية :

الحالة الأولى : $n = 3p$ حيث $p \in N$

إذن : $a = 3p(n^2 + 5)$

منه : a مضاعف 3

الحالة الثانية : $n = 3p + 1$ حيث $p \in N$

إذن : $a = n[(3p + 1)^2 + 5]$

أي $a = n(9p^2 + 6p + 1 + 5)$

أي $a = n(9p^2 + 6p + 6)$

أي $a = 3\,n(3\,p^2 + 2\,p + 2)$

منه : a مضاعف 3

الحالة الثالثة : $n = 3\,p + 2$ حيث $p \in N$

إذن : $a = n[(3\,p + 2)^2 + 5]$

أي $a = n(9\,p^2 + 12\,p + 4 + 5)$

أي $a = n(9\,p^2 + 12\,p + 9)$

أي $a = 3\,n(3\,p^2 + 4\,p + 3)$

أي a مضاعف 3

نتيجة : من أجل كل قيمة للعدد الطبيعي n فإن a مضاعف 3

التمرين ــ 48

a عدد طبيعي

برهن أن العدد $A = a(a^2 - 1)$ مضاعف 6

الحــل ــ 48

ليكن a عدد طبيعي

إذن : الأعداد $(a - 1)$ ؛ a و $a + 1$ هي أعداد صحيحة متتابعة

منه : أحد هذه الأعداد زوجية أي تكتب من الشكل $2\,p$ حيث $p \in N$
أحد هذه الأعداد مضاعفة لــ 3 أي تكتب من الشكل $3\,q$ حيث $q \in N$

إذن : جداء هذه الأعداد يكتب من الشكل $2\,p \times 3\,q$ أي $6p\,q$

بما أن $A = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1)$

فإن A يكتب من الشكل $6\,p\,q$ إذن : A مضاعف 6 .

التمرين ــ 49

1 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن رقم آحاد العدد $n^5 - n$ هو 0

2 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم p فإن العددين n^{p+1} و n^{p+5} لهما نفس رقم الآحاد

الحــل ــ 49

1 ــ يكون رقم آحاد العدد $n^5 - n$ هو 0 إذا و فقط إذا كان $n^5 - n$ مضاعف 10

لنثبت إذن بالتراجع صحة الخاصية : $n^5 - n$ مضاعف 10

من أجل : $n = 0$: $0^5 - 0 = 0$ و 0 مضاعف 10

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض أن $n^5 - n$ مضاعف 10 أي $n^5 - n = 10\,k$ حيث $k \in N$

هل $(n + 1)^5 - (n + 1)$ مضاعف 10 ؟

$$(n + 1)^5 - (n + 1) = n^5 + 5\,n^4 + 10\,n^3 + 10\,n^2 + 5\,n + 1 - n - 1$$
$$= n^5 + 5\,n^4 + 10\,n^3 + 10\,n^2 + 5\,n - n$$
$$= n^5 - n + 10(n^3 + n^2) + 5\,n(n^3 + 1)$$
$$= 10\,k + 10(n^3 + n^2) + 5\,n(n^3 + 1)$$

لكن : إذا كان n زوجي فإن $5\,n(n^3 + 1) = 5 \times 2\,p(n^3 + 1)$
أي $5\,n(n^3 + 1) = 10\,p(n^3 + 1)$
إذا كان n فردي فإن $n^3 + 1$ زوجي

أي $5\,n(n^3 + 1) = 10\,q$

منه : $(n + 1)^5 - (n + 1) = 10[k + (n^3 + n^2) + q]$

أي : $(n + 1)^5 - (n + 1)$ مضاعف 10

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n^5 - n$ مضاعف 10

أي من أجل كل عدد طبيعي n فإن رقم آحاد $n^5 - n$ هو 0

2 ــ لدينا : $n^{p+5} - n^{p+1} = n^p(n^5 - n)$

إذن : رقم آحاد العدد $n^{p+5} - n^{p+1}$ هو 0 منه العددان n^{p+5} و n^{p+1} لهما نفس رقم الآحاد .

التمرين ـــ 50

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $\begin{cases} a = n^2 + 5n + 4 \\ b = n^2 + 3n + 2 \end{cases}$

1 ـــ بين أن العدد $(n + 1)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b

2 ـــ عين قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها العدد $(n + 1)$ قاسما للعدد $3n^2 + 15n + 20$

الحـل ـــ 50

1 ـــ **باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :**

$$\begin{array}{r|l} n^2 + 5n + 4 & n+1 \\ \hline n^2 + n & n+4 \\ 4n+4 & \\ 4n+4 & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} n^2 + 3n + 2 & n+1 \\ \hline n^2 + n & n+2 \\ 2n+2 & \\ 2n+2 & \\ 0 & \end{array}$$

بما أن بواقي القسمة الإقليدية لـــ كل من a و b على $(n+1)$ هو 0 فإن العدد $(n+1)$ هو قاسم مشترك لكل من a و b

2 ـــ يكون $(n+1)$ قاسما لـــ $3n^2 + 15n + 20$ إذا و فقط إذا وجد عدد طبيعي q

حيث $3n^2 + 15n + 20 = q(n+1)$

أي : $q = \dfrac{3n^2 + 15n + 20}{n+1}$

باجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{r|l} 3n^2 + 15n + 20 & n+1 \\ \hline 3n^2 + 3n & 3n+12 \\ 12n+20 & \\ 12n+12 & \\ 8 & \end{array}$$

نحصل على $q = 3n + 12 + \dfrac{8}{n+1}$

إذن : يكون $(n+1)$ قاسم لـ $3n^2 + 15n + 20$ إذا و فقط

إذا كان $(n+1)$ قاسما لـ 8 أي $(n+1) \in \{1 ; 2 ; 4 ; 8\}$

منه : $n \in \{0 ; 1 ; 3 ; 7\}$

خلاصة : قيم n حتى يكون $(n+1)$ قاسم لـ $3n^2 + 15n + 20$ هي $\{0 ; 1 ; 3 ; 7\}$

التمرين ـــ 51

n و a عددان صحيحان حيث a يقسم $n - 1$ و $n^2 + n + 3$

1 ـــ بين أن a يقسم $n^2 - 2n + 1$

2 ـــ إستنتج أن a يقسم $3n + 2$

3 ـــ بين إذن أن a يقسم 5

4 ـــ ما هي القيم الصحيحة الممكنة للعدد a ؟

الحـل ـــ 51

1 ـــ لدينا : $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$

إذن : $(n-1)$ يقسم $n^2 - 2n + 1$ من أجل $n \neq 1$

لكن : a يقسم $(n-1)$

إذن : بالتعدي فإن a يقسم $n^2 - 2n + 1$

2 ـــ لدينا $\begin{cases} a \mid n^2 + n + 3 \\ a \mid n^2 - 2n + 1 \end{cases}$ إذن : $a \mid n^2 + n + 3 - (n^2 - 2n + 1)$

أي $a \mid 3n + 2$ و هو المطلوب

3 ـــ لدينا $\begin{cases} a \mid n - 1 \\ a \mid 3n + 2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} a \mid 3(n-1) \\ a \mid 3n + 2 \end{cases}$ أي $\begin{cases} a \mid 3n - 3 \\ a \mid 3n + 2 \end{cases}$

منه : $a \mid 3n + 2 - (3n - 3)$ أي $a \mid 5$ و هو المطلوب

4 ـــ $\begin{cases} a \mid 5 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$ إذن : $a \in \{1 ; 5 ; -1 ; -5\}$

التمرين ــ 52

n عدد طبيعي فردي . S هو مجموع أعداد طبيعية متتابعة و عددها n
بين أن العدد S يقبل القسمة على n .

الحـل ــ 52

ليكن $n = 2p + 1$ حيث $p \in \mathbb{N}$

$S = q + (q+1) + (q+2) + \ldots\ldots + (q+n-1)$ حيث q عدد طبيعي كيفي .

S هو مجموع n حد من حدود متتالية حسابية أساسها 1 و حدها الأول q

إذن :

$$S = \frac{n}{2}(q + q + n - 1)$$
$$= \frac{n}{2}(2q + n - 1)$$
$$= \frac{n}{2}(2q + 2p + 1 - 1)$$
$$= \frac{n}{2}(2q + 2p)$$
$$= \frac{2n}{2}(q + p)$$
$$= n(q + p)$$

إذن : S يقبل القسمة على n .

التمرين ــ 53

برهن بالتراجع على n أن من أجل كل عدد طبيعي n : $n^3 + 11n$ يقبل القسمة على 6

الحـل ــ 53

من أجل $n = 0$: $n^3 + 11n = 0$ و 0 يقبل القسمة على 6

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض أن $n^3 + 11n$ يقبل القسمة على 6 من أجل $n > 0$ أي $n^3 + 11n = 6k$

هل $(n+1)^3 + 11(n+1)$ يقبل القسمة على 6 ؟

$$(n+1)^3 + 11(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 11n + 11$$
$$= (n^3 + 11n) + 12 + 3n^2 + 3n$$
$$= 6k + 6(2) + 3n(n+1)$$

نميز حالتين : إذا كان n زوجي فإن $n = 2p$ إذن : $3n(n+1) = 6p(n+1)$

إذا كان n فردي فإن $(n+1)$ زوجي أي $n + 1 = 2p$ منه $3n(n+1) = 6np$

إذن : من أجل كل n من $\mathbb{N}$ فإن $3n(n+1) = 6q$ حيث $q \in \mathbb{N}$

منه :

$$(n+1)^3 + 11(n+1) = 6k + 6(2) + 6q$$
$$= 6(k + 2 + q)$$
$$= 6k'$$

إذن : $(n+1)^3 + 11(n+1)$ يقبل القسمة على 6

أي الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n^3 + 11n$ يقبل القسمة على 6

التمرين ــ 54

ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 71 على 72 ؟

الحـل ــ 54

$71 < 72$ إذن : باقي القسمة الإقليدية لــ 71 على 72 هو 71

التمرين ــ 55

يحتوي كتاب على 4350 سطرا مكتوبا حيث كل صفحة تحمل 34 سطرا ماعدا الصفحة الأخيرة .
ما هو عدد صفحات هذا الكتاب و ما هو عدد الأسطر المكتوبة على الصفحة الأخيرة

الحل ــ 55

بإجراء القسمة الإقليدية كما يلي :

4350	34
34	127
95	
68	
270	
238	
32	

إذن : $4350 = 34(127) + 32$

منه : عدد صفحات الكتاب هو : $127 + 1 = 128$

و الصفحة الأخيرة تحمل 32 سطرا مكتوبا .

التمرين ــ 56

علما أنه يوجد عدد طبيعي k حيث $100^{100} = 13k + 35$ ، ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 100^{100} على 13 ؟

الحل ــ 56

$100^{100} = 13k + 35$ إذن : باقي قسمة 100^{100} على 13 هو نفسه باقي قسمة 35 على 13

إذن : باقي قسمة 100^{100} على 13 هو 9

التمرين ــ 57

n و m عددان طبيعيان باقي قسمتهما على 17 هما على الترتيب 8 و 12 . عين بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد $n+m$ ؛ nm ؛ m^2 على 17

الحل ــ 57

نضع $\begin{cases} n = 17k + 8 & \text{حيث } k \in \mathbb{N} \\ m = 17p + 12 & \text{حيث } p \in \mathbb{N} \end{cases}$

منه : $\begin{cases} n + m = 17k + 8 + 17p + 12 \\ nm = (17k + 8)(17p + 12) \\ m^2 = (17p + 12)^2 \end{cases}$

أي $\begin{cases} n + m = 17(k + p) + 20 \\ nm = 17k(17p + 12) + 8 \times 17p + 96 \\ m^2 = 17^2 p^2 + 24(17p) + 144 \end{cases}$

96	17
85	5
11	

144	17
136	8
8	

أي $\begin{cases} n + m = 17(k + p) + 17 + 3 \\ nm = 17(17kp + 12k + 8p) + 17(5) + 11 \\ m^2 = 17(17p^2 + 24p) + 17(8) + 8 \end{cases}$

منه $\begin{cases} n + m = 17(k + p + 1) + 3 \\ nm = 17(17kp + 12k + 8p + 5) + 11 \\ m^2 = 17(17p^2 + 24p + 8) + 8 \end{cases}$

إذن : $\begin{cases} \text{باقي قسمة } n+m \text{ على 17 هو } 3 \\ \text{باقي قسمة } nm \text{ على 17 هو } 11 \\ \text{باقي قسمة } m^2 \text{ على 17 هو } 8 \end{cases}$

التمرين ــ 58

عين الأعداد الطبيعية غير المعدومة n التي يكون باقي قسمتها على 43 مساويا لمربع حاصل هذه القسمة .

الحل ــ 58

ليكن $n = 43q + r$ حيث $\begin{cases} q \text{ حاصل القسمة} \\ r \text{ باقي القسمة إذن : } 0 \le r < 43 \end{cases}$

لدينا $r = q^2$ إذن : $0 \le q^2 < 43$

بما أن q عدد طبيعي فإن القيم الممكنة لــ q حتى يكون $0 \le q^2 < 43$ هي :

$\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ لأن $7^2 = 49$

إذن : القيم الممكنة لــ r حيث $r = q^2$ هي : $\{0 ; 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36\}$

نتيجة :

قيم q	0	1	2	3	4	5	6
قيم r	0	1	4	9	16	25	36
$n = 43q + r$	0	44	90	138	188	240	294

منه قيم n المطلوبة هي : $\{44 ; 90 ; 138 ; 188 ; 240 ; 294\}$ (n غير معدوم)

التمرين ــ 59

1 ــ حول 241312 s (ثانية) إلى الأيام و الساعات و الدقائق و الثواني .

2 ــ أكتب خوارزمية لتحويل عدد n من الثواني إلى أيام ، ساعات ، دقائق و ثواني .

الحــل ــ 59

1 ــ 1 يوم ← 24 ساعة

1 ساعة ← 60 دقيقة

1 دقيقة ← 60 ثانية

إذن : 1 ساعة ← 60×60 ثانية

منه : 1 يوم ← $24 \times 60 \times 60$ ثانية

أي : 1 يوم ← 86400 ثانية

إذن : عدد الأيام المتواجدة في 241312 ثانية هو حاصل قسمة 241312 على 86400

منه : عدد الأيام هو : 2

241312	86400
172800	2
68512	

عدد الساعات المتواجدة في 68512 ثانية هو حاصل قسمة 68512 على 3600

منه عدد الساعات هو : 19

68512	3600
68400	19
112	

عدد الدقائق المتواجدة هي 112 ثانية هو حاصل قسمة 112 على 60

إذن : عدد الدقائق هو : 1

112	60
60	1
52	

خلاصة : 241312 ثانية فيها يومين و 19 ساعة و دقيقة واحدة و 52 ثانية .

2 ــ الخوارزمية

1 ــ نبحث عن r_1 حيث $n = q_1 \times 86400 + r_1$ حيث $0 \le r_1 < 86400$

2 ــ إذا كان $r_1 \neq 0$ نبحث عن r_2 حيث $r_1 = 3600\, q_2 + r_2$ حيث $0 \le r_2 < 3600$

3 ــ إذا كان $r_2 \neq 0$ نبحث عن r_3 حيث $r_2 = 60\, q_3 + r_3$ حيث $0 \le r_3 < 60$

نتيجة : العدد n من الثواني مكون من :

q_1 يوم و q_2 ساعة و q_3 دقائق و r_3 ثواني .

التمرين ــ 60

حاصل القسمة الإقليدية للعدد 1517 على العدد الطبيعي b هو 75

عين b ثم باقي هذه القسمة .

الحــل ــ 60

ليكن r باقي هذه القسمة حيث $0 \le r < b$

إذن : $1517 = 75\, b + r$

لنجري القسمة الإقليدية لــ 1517 على 75 كما يلي :

1517	75
150	20
17	

منه : $1517 = 75 \times 20 + 17$

إذن : $b = 20$ و $r = 17$

التمرين ــ 61

1 ــ أنجز القسمة الإقليدية للعدد 76 على 17

2 ــ n عدد طبيعي . ما هو حاصل و باقي قسمة العدد $76 + n$ على 17

3 ــ إستنتج الحالة العامة كما يلي : القسمة الإقليدية لــ a على b هو q و الباقي r .

ما هو حاصل و باقي قسمة العدد $n + a$ على b

الحــل ــ 61

1 ــ

76	17
68	4
8	

إذن : $76 = 17(4) + 8$ أي الحاصل 4 و الباقي 8

2 ـ لدينا $76 = 17(4) + 8$ إذن : $n + 76 = n + 17(4) + 8$

أي : $n + 76 = (n + 8) + 17(4)$

منه : باقي قسمة $(n + 76)$ على 17 هو باقي قسمة $(n + 8)$ على 17

و حاصل القسمة هو $4 + q$ حيث q هو حاصل قسمة $(n + 8)$ على 17

مثال : ليكن $n = 20$ إذن : $20 + 8 = 28$ و $28 = 17(1) + 11$

منه : باقي قسمة $(20 + 76)$ على 17 هو 11 ، حاصل قسمة $(20 + 76)$ على 17 هو $1 + 4 = 5$

التحقيق : $20 + 76 = 96$

$$\begin{array}{r|l} 96 & 17 \\ 85 & 5 \\ \hline 11 & \end{array}$$

3 ـ **الحالة العامة :** $a = b\,q + r$ و $n + r = b\,q' + r'$ حيث $0 \leq r < b$ و $0 \leq r' < b$

إذن : باقي قسمة $(a + n)$ على b هو r' ، حاصل قسمة $(n + a)$ على b هو $q + q'$

<u>التمرين ـ 62</u>

1 ـ بين أن إذا كان a و b عددان طبيعيان غير معدومين حيث $(a^2 + b^2)$ عدد فردي فإن a و b مختلفين في الشفعية أحدهما فردي و الآخر زوجي

2 ـ بين أن إذا كان n عدد فردي هو مجموع مربعين فإن n يكتب على الشكل $n = 4\,k + 1$ حيث $k \in N$

<u>الحـل ـ 62</u>

1 ـ ليكن a و b عددين طبيعيين . نميز الحالات التالية :

a	b	$a^2 + b^2$
$2p$	$2q$	$4p^2 + 4q^2 = 2(2p^2 + 2q^2)$
$2p$	$2q+1$	$4p^2 + 4q^2 + 4q + 1 = 2(2p^2 + 2q^2 + 2q) + 1$
$2p+1$	$2q$	$4p^2 + 4p + 4q^2 + 1 = 2(2p^2 + 2p + 2q^2) + 1$
$2p+1$	$2q+1$	$4p^2 + 4p + 4q^2 + 4q + 2 = 2(2p^2 + 2p + 2q^2 + 2q + 1)$

نتيجة : الحالات الوحيدة التي يكون فيها $a^2 + b^2$ فردي هي من أجل :

$a = 2p$ و $b = 2q + 1$ أو $a = 2p + 1$ و $b = 2q$ أي a و b مختلفين في الشفعية .

2 ـ n فردي و n مجموع مربعين

ليكن $n = a^2 + b^2$ حيث a و b عددين طبيعيين غير معدومين .

حسب السؤال (1) فإن a و b من شفعيتين مختلفتين .

نضع $a = 2p + 1$ و $b = 2q$ حيث p و q عددين طبيعيين .

إذن : $n = (2p + 1)^2 + (2q)^2$

$= 4p^2 + 4p + 4q^2 + 1$

$= 4(p^2 + p + q^2) + 1$

$= 4k + 1$ حيث $k = p^2 + p + q^2$

نتيجة : n يكتب من الشكل $4k + 1$ حيث $k \in N$

<u>التمرين ـ 63</u>

من أجل كل عدد طبيعي n نضع $u_n = 1 + 5 + 5^2 + \ldots\ldots + 5^n$

1 ـ برر أن u_n عدد طبيعي .

2 ـ أحسب u_n بدلالة n

3 ـ إستنتج باقي قسمة العدد 5^{n+1} على 4 من أجل كل عدد طبيعي n

<u>الحـل ـ 63</u>

1 ـ من أجل كل n من N فإن 5^n هو عدد طبيعي .

إذن : u_n عدد طبيعي لأنه عبارة عن مجموع أعداد طبيعية .

2 ـ $u_n = 1 + 5 + 5^2 + \ldots\ldots + 5^n$

إذن : u_n هو مجموع $(n+1)$ حد من حدود متتالية هندسية أساسها 5 و حدها الأول 1

منه : $u_n = 1 \times \frac{5^{n+1}-1}{5-1}$ أي $u_n = \frac{5^{n+1}-1}{4}$

3 – بما أن $u_n \in N$ فإن $\frac{5^{n+1}-1}{4} \in N$

أي : 4 يقسم $5^{n+1}-1$

أي : $5^{n+1}-1 = 4k$ حيث $k \in N$

منه : $5^{n+1} = 4k+1$

أي : باقي قسمة 5^{n+1} على 4 هو 1

التمرين – 64

1 – برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n العدد $2^{3n} - 1$ مضاعف 7

2 – إستنتج باقي القسمة الإقليدية للعدد a على 7 في كل من الحالات التالية : أ) $a = 2^{3n}$ ب) $a = 2^{3n+1}$ ج) $a = 2^{3a+2}$

الحـل – 64

1 – البرهان بالتراجع :

من أجل $n = 0$: $2^{3n} - 1 = 1 - 1 = 0$

0 مضاعف 7 إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

نفرض أن $2^{3n} - 1$ مضاعف 7 من أجل $n > 0$ (أي $2^{3n} - 1 = 7k$)

هل $2^{3(n+1)} - 1$ مضاعف 7 ؟

$$\begin{aligned} 2^{3(n+1)} - 1 &= 2^{3n+3} - 1 \\ &= 2^3 \times 2^{3n} - 1 \\ &= 8 \times 2^{3n} - 1 \\ &= 7 \times 2^{3n} + 2^{3n} - 1 \\ &= 7 \times 2^{3n} + 7k \\ &= 7(2^{3n} + k) \end{aligned}$$

لأن حسب فرضية التراجع $2^{3n} - 1 = 7k$

إذن : $2^{3(n+1)} - 1$ مضاعف 7

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل n من N : $2^{3n} - 1$ مضاعف 7

2 – ليكن $2^{3n} - 1 = 7k$ حيث $k \in N$

أ) إذن : $2^{3n} = 7k + 1$

منه : باقي قسمة 2^{3n} على 7 هو 1

ب) $2^{3n+1} = 2 \times 2^{3n} = 2^{3n} + 2^{3n} = 2^{3n} - 1 + 2^{3n} - 1 + 2 = 7k + 7k + 2 = 7(2k) + 2$

إذن : باقي قسمة 2^{3n+1} على 7 هو 2

ج) $2^{3n+2} = 4 \times 2^{3n} = 2^{3n} + 2^{3n} + 2^{3n} + 2^{3n} = (2^{3n} - 1) + (2^{3n} - 1) + (2^{3n} - 1) + (2^{3n} - 1) + 4$

$= 7k + 7k + 7k + 7k + 4$

إذن : باقي قسمة 2^{3n+2} على 7 هو 4

التمرين – 65

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

1 – برهن أن القواسم المشتركة لــ a و $(a^2 + b)$ هي نفسها القواسم المشتركة لــ a و b

إستنتج علاقة بين $PGCD(a^2 + b ; a)$ و $PGCD(a ; b)$

2 – برهن أن $PGCD(a + b ; 2a + 3b) = PGCD(a ; b)$

الحـل – 65

1 – ليكن Δ قاسم مشترك لــ a و $a^2 + b$

$\left.\begin{array}{l} \Delta | a \\ \Delta | a^2 + b \end{array}\right\}$: إذن $\left.\begin{array}{l} \Delta | a^2 \\ \Delta | a^2 + b \end{array}\right\}$ منه : $\Delta | a^2 + b - a^2$ أي $\Delta | b$

إذن : إذا كان Δ قاسم مشترك لــ a و $a^2 + b$ فإن Δ قاسم لــ b ....(1)

ليكن الآن Δ قاسم مشترك لــ a و b

$\left.\begin{array}{l}\Delta | a \\ \Delta | b\end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l}\Delta | a^2 \\ \Delta | b\end{array}\right\}$ منه : $\Delta | a^2 + b$

إذن : إذا كان Δ قاسم مشترك لــ a و b فإن Δ قاسم مشترك لــ $a^2 + b$ .... (2)

من (1) و (2) نستنتج أن القواسم المشتركة لــ a و $a^2 + b$ هي نفسها القواسم المشتركة لــ a و b و خاصة القاسم المشترك الأكبر .

أي : $PGCD(a^2 + b ; a) = PGCD(a ; b)$

2 ــ بإجراء القسمة الإقليدية :

$$\begin{array}{r|l} 2a+3b & a+b \\ 2a+2b & 2 \\ \hline b & \end{array}$$

$PGCD(2a + 3b ; a + b) = PGCD(a + b ; b)$

من جهة أخرى و بإجراء القسمة الإقليدية

$$\begin{array}{r|l} a+b & b \\ b & 1 \\ \hline a & \end{array}$$

$PGCD(a + b ; b) = PGCD(b ; a)$

نتيجة : $PGCD(2a + 3b ; a + b) = PGCD(a ; b)$

التمرين ــ 66

n عدد طبيعي . نضع $a = 11n + 3$ و $b = 13n - 1$

1 ــ بين أن : $13a - 11b = 50$

2 ــ عين كل القيم الممكنة لــ $PGCD(a ; b)$

3 ــ عين ثنائية $(a ; b)$ حيث يكون $PGCD(a ; b) = 50$

الحــل ــ 66

1 ــ

$$\begin{aligned} 13a - 11b &= 13(11n + 3) - 11(13n - 1) \\ &= 143n + 39 - 143n + 11 \\ &= 50 \end{aligned}$$

2 ــ ليكن $PGCD(a ; b) = \Delta$

$\left.\begin{array}{l}\Delta | a \\ \Delta | b\end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l}\Delta | 13a \\ \Delta | 11b\end{array}\right\}$ إذن : $\Delta | 13a - 11b$ أي $\Delta | 50$

منه : القيم الممكنة لــ Δ هي قواسم العدد 50

أي : $PGCD(a ; b) \in \{1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 25 ; 50\}$

3 ــ لنبحث عن a و b حيث $PGCD(a ; b) = 50$

لدينا $13a - 11b = 50$

لاحظ أن : $13(6) - 11(7) = 78 - 77 = 1$

إذن : $13(6 \times 50) - 11(7 \times 50) = 50$

أي $13(300) - 11(350) = 50$

إذن : الثنائية $(300 ; 350)$ هي حل للمعادلة $13a - 11b = 50$

منه : $\left.\begin{array}{l}11n + 3 = 300 \\ 13n - 1 = 350\end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l}11n = 297 \\ 13n = 351\end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l}n = 297/11 \\ n = 351/13\end{array}\right\}$

نتيجة : $n = 27$ إذن $\left.\begin{array}{l}a = 300 \\ b = 350\end{array}\right\}$

التمرين ــ 67

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $\left\{\begin{array}{l}2a^2 + b^2 = 20992 \\ PGCD(a ; b) = 16\end{array}\right.$

الحــل ــ 67

ليكن $\left.\begin{array}{l}a = 16x \\ b = 16y\end{array}\right\}$ حيث $\left.\begin{array}{l}y \in N^* ; x \in N^* \\ PGCD(x ; y) = 1\end{array}\right\}$

إذن : الشرط $2a^2 + b^2 = 20992$ يصبح $2(16x)^2 + (16y)^2 = 20992$

أي : $2(256x^2) + 256y^2 = 20992$

أي $2x^2 + y^2 = 82$

أي $y^2 = 82 - 2x^2$

أي $y^2 = 2(41 - x^2)$

بما أن $y^2 > 0$ فإن $41 - x^2 > 0$ إذن $x^2 < 41$ منه $x < 7$

إذن : القيم الممكنة لـــ x هي $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$

منه الجدول التالي :

x	1	2	3	4	5	6
x^2	1	4	9	16	25	36
$41 - x^2$	40	37	32	25	16	5
$2(41 - x^2)$	80	74	64	50	32	10

نتيجة : الحالة الوحيدة التي يكون فيها العدد $2(41 - x^2)$ مربع تام هي من أجل $x = 3$ إذن : $y^2 = 64$ منه $y = 8$

بما أن $PGCD(3 ; 8) = 1$ فإن الثنائية المطلوبة هي :

$(x ; y) = (3 ; 8)$ منه $(a ; b) = (16 \times 3 ; 16 \times 8)$

أي $(a ; b) = (48 ; 128)$

التمرين ــ 68

a و b عددان طبيعيان غير معدومين . نضع $PGCD(a ; b) = d$

عين كل الثنائيات $(a ; b)$ التي تحقق $a b + 5 d^2 = 35 d$

الحــل ــ 68

ليكن $\begin{cases} a = x d \\ b = y d \end{cases}$ حيث $\begin{cases} y \in N^* ; x \in N^* \\ PGCD(x ; y) = 1 \end{cases}$

إذن :

$$a b + 5 d^2 = 35 d \Leftrightarrow (x d)(y d) + 5 d^2 = 35 d$$
$$\Leftrightarrow x y d^2 + 5 d^2 = 35 d$$
$$\Leftrightarrow (x y + 5) d^2 = 35 d$$
$$\Leftrightarrow (x y + 5) d = 35 \quad \text{لأن } d \neq 0$$

إذن : $(x y + 5)$ يقسم 35

لكن $x y > 0$ إذن : $x y + 5 > 5$

منه : $(x y + 5) \in \{7 ; 35\}$

إذن : $d \in \{5 ; 1\}$

الحالة (1) من أجل $x y + 5 = 7$ إذن : $x y = 2$ و $d = 5$

منه : $(x ; y) \in \{(1 ; 2) ; (2 ; 1)\}$

أي $(a ; b) \in \{(5 ; 10) ; (10 ; 5)\}$

الحالة (2) من أجل $x y + 5 = 35$ إذن : $x y = 30$ و $d = 1$

منه : $(x ; y) \in \{(1 ; 30) ; (2 ; 15) ; (3 ; 10) ; (5 ; 6) ; (6 ; 5) ; (10 ; 3) ; (15 ; 2) ; (30 ; 1)\}$

إذن : $(a ; b) \in \{(1 ; 30) ; (2 ; 15) ; (3 ; 10) ; (5 ; 6) ; (6 ; 5) ; (10 ; 3) ; (15 ; 2) ; (30 ; 1)\}$

خلاصة : الثنائيات $(a ; b)$ المطلوبة هي :

$\{(5 ; 10) ; (10 ; 5) ; (1 ; 30) ; (2 ; 15) ; (3 ; 10) ; (5 ; 6) ; (6 ; 5) ; (10 ; 3) ; (15 ; 2) ; (30 ; 1)\}$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين — 1

a و b عددان طبيعيان غير معدومين .

نضع $x = 7a - 5b$ و $y = 4a - 3b$

1 — برهن أن : $PGCD(|x|;|y|) = PGCD(a;b)$

2 — عين كل الثنائيات من الأعداد الطبيعية $(\alpha;\beta)$ حيث $\begin{cases}(7\alpha - 5\beta)(4\alpha - 3\beta) = 1300\\ PGCD(\alpha;\beta) = 5\end{cases}$

الحـل — 1

1 — ليكن Δ قاسم مشترك لـ a و b

$\begin{cases}\Delta | a\\ \Delta | b\end{cases}$ إذن ، $\begin{cases}\Delta|7a \text{ و } \Delta|5b\\ \Delta|4a \text{ و } \Delta|3b\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\Delta|7a-5b\\ \Delta|4a-3b\end{cases}$ أي $\begin{cases}\Delta|x\\ \Delta|y\end{cases}$

منه : Δ قاسم مشترك لـ x و y .... (1)

ليكن الآن Δ' قاسم مشترك لـ x و y

$\begin{cases}\Delta'|x\\ \Delta'|y\end{cases}$ إذن : $\begin{cases}\Delta'|4x \text{ و } \Delta'|7y\\ \Delta'|3x \text{ و } \Delta'|5y\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}\Delta'|4x-7y\\ \Delta'|3x-5y\end{cases}$

أي $\begin{cases}\Delta'|4(7a-5b)-7(4a-3b)\\ \Delta'|3(7a-5b)-5(4a-3b)\end{cases}$

أي $\begin{cases}\Delta'|b\\ \Delta'|a\end{cases}$

أي Δ' قاسم مشترك لـ a و b .... (2)

نتيجة : من (1) و (2) نستنتج أن مجموعة القواسم المشتركة لـ a و b هي نفسها مجموعة القواسم المشتركة لـ x و y

إذن : $PGCD(x;y) = PGCD(a;b)$

و خاصة : $PGCD(|x|;|y|) = PGCD(a;b)$

2 — حسب السؤال (1) فإن $PGCD(7\alpha - 5\beta ; 4\alpha - 3\beta) = PGCD(\alpha;\beta)$

إذن : $PGCD(7\alpha - 5\beta ; 4\alpha - 3\beta) = 5$

منه : $\begin{cases}7\alpha - 5\beta = 5k\\ 4\alpha - 3\beta = 5q\end{cases}$ حيث $\begin{cases}q \in Z \text{ و } k \in Z\\ PGCD(k;q) = 1\end{cases}$

إذن المساواة $(7\alpha - 5\beta)(4\alpha - 3\beta) = 1300$ تصبح : $(5k)(5q) = 1300$

أي : $25kq = 1300$

أي : $kq = 52$

منه : $(k;q) \in \{(1;52)(4;13)(13;4)(52;1)(-1;-52)(-4;-13)(-13;-4)(-52;-1)\}$

لنحل الجملة $\begin{cases}7\alpha - 5\beta = 5k\\ 4\alpha - 3\beta = 5q\end{cases}$ أي $\begin{cases}7\alpha - 5\beta - 5k = 0\\ 4\alpha - 3\beta - 5q = 0\end{cases}$

المحدد : $D = \begin{vmatrix}7 & -5\\ 4 & -3\end{vmatrix} = -21 + 20 = -1$

إذن : الجملة تقبل حلا وحيدا :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\begin{vmatrix} -5 & -5k \\ -3 & -5q \end{vmatrix}}{-1} = -(25q - 15k) = 15k - 25q \\ \beta = \dfrac{\begin{vmatrix} -5k & 7 \\ -5q & 4 \end{vmatrix}}{-1} = -(-20k + 35q) = 20k - 35q \end{cases}$$

جدول القيم الممكنة لـ α و β :

k	q	15 k	25 q	$\alpha = 15k - 25q$	20 k	35 q	$\beta = 20k - 35q$
1	52	15	1300	- 1285	20	1820	- 1800
4	13	60	325	- 265	80	455	- 375
13	4	195	100	95	260	140	120
52	1	780	25	755	1040	35	1005
- 1	- 52	- 15	- 1300	1285	- 20	- 1820	1800
- 4	- 13	- 60	- 325	265	- 80	- 455	375
- 13	- 4	- 195	- 100	- 95	- 260	- 140	- 120
- 52	- 1	- 780	- 25	- 755	- 1040	- 35	- 1005

نتيجة : الثنائيات $(\alpha ; \beta)$ المطلوبة هي :

$\{(-1285 ; -1800) ; (-265 ; -375) ; (95 ; 120) ; (755 ; 1005) ; (1285 ; 1800) ; (265 ; 375) ;$
$(-95 ; -120) ; (-755 ; -1005)\}$

التمرين – 2

n عدد طبيعي . نضع $a = 3n + 4$ و $b = 8n + 11$

برهن أن a و b أوليان فيما بينهما

الحل – 2

من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} 3b - 8a &= 3(8n + 11) - 8(3n + 4) \\ &= 24n + 33 - 24n - 32 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha ; \beta) = (3 ; -8)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تحقق $\alpha b + \beta a = 1$

منه : حسب نظرية بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

التمرين – 3

n عدد طبيعي . نضع $a = 7n^2 + 2$ و $b = 4n^2 + 1$

برهن أن a و b أوليان فيما بينهما .

الحل – 3

من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$$\begin{aligned} 4a - 7b &= 4(7n^2 + 2) - 7(4n^2 + 1) \\ &= 28n^2 + 8 - 28n^2 - 7 \\ &= 1 \end{aligned}$$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha ; \beta) = (4 ; -7)$ من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تحقق $\alpha a + \beta b = 1$

إذن : حسب نظرية بيزو فإن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

التمرين – 4

n عدد طبيعي غير معدوم .

1 – عين القيم الممكنة لـ $PGCD(2n - 1 ; 9n + 4)$

2 – برهن أن إذا كان $PGCD(2n - 1 ; 9n + 4) = 17$ فإن 17 يقسم $n + 8$

3 – إستنتج قيم العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $PGCD(2n - 1 ; 9n + 4) = 17$

الحل – 4

1 – ليكن $PGCD(2n - 1 ; 9n + 4) = \Delta$

$$\begin{cases} \Delta | 9n + 4 \\ \Delta | 2n - 1 \end{cases} \text{ إذن : } \begin{cases} \Delta | 2(9n + 4) \\ \Delta | 9(2n - 1) \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \Delta | 18n + 8 \\ \Delta | 18n - 9 \end{cases} \text{ منه } \Delta | 18n + 8 - (18n - 9)$$

أي $17|\Delta$ إذن : القيم الممكنة لــ Δ هي $\{1\,;17\}$

2 ــ ليكن $PGCD(2n-1\,;9n+4)=17$

إذن : $\left\{\begin{array}{l}17|9n+4\\17|2n-1\end{array}\right.$ أي $\left\{\begin{array}{l}17|9n+4\\17|4(2n-1)\end{array}\right.$ منه $\left\{\begin{array}{l}17|9n+4\\17|8n-4\end{array}\right.$ $17|9n+4-(8n-4)$

أي $17|n+8$ و هو المطلوب .

3 ــ يكون $PGCD(2n-1\,;9n+4)=17$ إذا و فقط إذا كان $\left\{\begin{array}{l}17 \text{ يقسم } n+8\\PGCD(2n-1\,;9n+4)\neq 1\end{array}\right.$

إذن : $n+8=17k$ حيث $k\in N$

أي : $n=17k-8$ حيث $k\in N^*$ لأن n عدد طبيعي .

تحقيق : $2n-1=2(17k-8)-1=34k-17$

$9n+4=9(17k-8)+4=153k-68$

$$\begin{array}{l|l}153k-68 & 34k-17\\ \underline{136k-68} & 4\\ 17k & \end{array}\qquad \begin{array}{l|l}34k-17 & 17k\\ \underline{34k} & 2\\ -17 & \end{array}\qquad \begin{array}{l|l}17k & 17\\ \underline{17k} & k\\ 0 & \end{array}$$

إذن : $PGCD(153k-68\,;34k-17)=17$

منه : $PGCD(9n+4\,;2n-1)=17$

التمرين ــ 5

n عدد طبيعي . نضع $a=5n^2+14n+14$ ؛ $b=n+2$

1 ــ برهن أن b قاسم لعدد $5n^2+14n+8$

2 ــ إستنتج أن b يقسم a معناه b يقسم 6

3 ــ عين حسب قيم العدد n باقي قسمة a على b

الحل ــ 5

1 ــ بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{l|l}5n^2+14n+8 & n+2\\ \underline{5n^2+10n} & 5n+4\\ 4n+8 & \\ \underline{4n+8} & \\ 0 & \end{array}$$

إذن : $5n^2+14n+8=(n+2)(5n+4)$

منه : $n+2$ قاسم لــ $5n^2+14n+8$

أي : b قاسم لــ $5n^2+14n+8$

2 ــ بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي :

$$\begin{array}{l|l}5n^2+14n+14 & n+2\\ \underline{5n^2+10n} & 5n+4\\ 4n+14 & \\ \underline{4n+8} & \\ 6 & \end{array}$$

نتيجة : $\dfrac{5n^2+14n+14}{n+2}=5n+4+\dfrac{6}{n+2}$

إذن : يكون $(n+2)$ قاسم لــ $5n^2+14n+14$ إذا و فقط إذا كان $n+2$ قاسم لــ 6

أي : b يقسم a معناه b يقسم 6 .

3 ــ نميز الحالات التالية :

أ) b يقسم 6 إذن : $b\in\{1\,;2\,;3\,;6\}$

أي : $n+2\in\{1\,;2\,;3\,;6\}$

منه : $n\in\{0\,;1\,;4\}$ لأن n طبيعي .

في هذه الحالة b يقسم a إذن : باقي قسمة a على b هو 0

ب) b لا يقسم 6 إذن : $b\in N-\{0\,;1\,;4\}$

في هذه الحالة باقي ق ة a على b هو كمايلي :

قيم n	2	3	$n\geq 5$
باقي قسمة a على b	2	1	6

التمرين ــ 6

n عدد صحيح يختلف عن 1

نضع $a = 3n + 5$ و $b = n - 1$

1 ــ تحقق أن $a = 3b + 8$.

2 ــ أوجد قيم n حتى يكون $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا .

3 ــ نفرض أن n عدد طبيعي . برهن أن $PGCD(a ; b)$ هو قاسم لــ 8

ثم ناقش حسب قيم n القيم الممكنة لــ $PGCD(a ; b)$

الحـــل ــ 6

1 ــ

$$\begin{aligned} 3b + 8 &= 3(n - 1) + 8 \\ &= 3n - 3 + 8 \\ &= 3n + 5 \\ &= a \end{aligned}$$

2 ــ يكون $\frac{a}{b}$ عددا صحيحا إذا و فقط إذا كان b قاسم لــ a

بإجراء القسمة الإقليدية كمايلي

$$\begin{array}{r|l} 3n + 5 & n - 1 \\ \underline{3n - 3} & 3 \\ 8 & \end{array}$$

إذن : يكون باقي قسمة $3n + 5$ على $n - 1$ معدوم

إذا و فقط إذا كان $(n - 1)$ قاسم لــ 8

أي : $(n - 1) \in \{1 ; 2 ; 4 ; 8 ; -1 ; -2 ; -4 ; -8\}$

منه : $n \in \{2 ; 3 ; 5 ; 9 ; 0 ; -1 ; -3 ; -7\}$

3 ــ n عدد طبيعي يختلف عن 1

ليكن Δ قاسم مشترك أكبر لــ a و b

$\left.\begin{array}{l}\Delta | a \\ \Delta | b\end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l}\Delta | a \\ \Delta | 3b\end{array}\right\}$ إذن : $\Delta | a - 3b$ أي $\Delta | 8$ لأن $a = 3b + 8$

نتيجة : إذا كان $PGCD(a ; b) = \Delta$ فإن $\Delta | 8$

إذن : $PGCD(a ; b) \in \{1 ; 2 ; 4 ; 8\}$

حسب خوارزمية إقليدس :

$$\begin{array}{r|l} 3n + 5 & n - 1 \\ \underline{3n - 3} & 3 \\ 8 & \end{array}$$

$PGCD(a ; b) = PGCD(n - 1 ; 8)$

منه الحالات التالية :

أ) إذا كان $n - 1 = 8k$ أي $n = 8k + 1$ فإن $PGCD(a ; b) = 8$

ب) إذا كان $n - 1 = 8k + 4$ أي $n = 8k + 5$ فإن $PGCD(a ; b) = 4$

ج) إذا كان $n - 1 = 4k + 2$ أي $n = 4k + 3$ فإن $PGCD(a ; b) = 2$

د) في الحالات الأخرى : $PGCD(a ; b) = 1$

أمثلة :

من أجل $n = 45$ لدينا : $n = 8(5) + 5$ إذن : $PGCD(a ; b) = 4$

من أجل $n = 100$ لا يمكن كتابة n من أحد الأشكال $8k + 1$ أو $8k + 5$ أو $4k + 3$

إذن : $PGCD(a ; b) = 1$

من أجل $n = 43$ لدينا : $n = 4(10) + 3$ إذن : $PGCD(a ; b) = 2$

التمرين ــ 7

n عدد طبيعي غير معدوم .

نضع $\alpha = n^2 + n$ و $\beta = n + 2$

1 ــ برهن أن : $PGCD(\alpha ; \beta) = PGCD(n ; \beta)$

2 ــ إستنتج القيم الممكنة لــ $PGCD(\alpha ; \beta)$

نعتبر العددين a و b حيث $a = 3n^3 + 5n^2 + 2n$ و $b = 3n^2 + 8n + 4$

3 ــ برهن أن العدد $(3n + 2)$ هو قاسم مشترك للعددين a و b

4 ــ إستنتج حسب قيم n أن $PGCD(a ; b)$ هو $(3n + 2)$ أو $2(3n + 2)$

5 ــ عين α و β علما أن : $PGCD(a ; b) = 41$

الحـل ــ 7

1 ــ بإجراء خوارزمية إقليدس كمايلي :

$$\begin{array}{c|c} n^2+n & n+2 \\ n^2+2n & n \\ -n & \end{array}$$

$PGCD(n^2+n\,;n+2)=PGCD(-n\,;n+2)$

أي : $PGCD(\alpha\,;\beta)=PGCD(|-n|\,;\beta)$

أي : $PGCD(\alpha\,;\beta)=PGCD(n\,;\beta)$ و هو المطلوب

2 ــ لدينا $PGCD(\alpha\,;\beta)=PGCD(n\,;\beta)$ منه حسب خوارزمية إقليدس :

$$\begin{array}{c|c} n+2 & n \\ n & 1 \\ 2 & \end{array}$$

إذن : القيم الممكنة لـ $PGCD(\alpha\,;\beta)$ هي $\{1\,;2\}$ كمايلي :

$PGCD(\alpha\,;\beta)=PGCD(n\,;2)$

نتيجة :

إذا كان n زوجي فإن $PGCD(n\,;2)=2$

إذا كان n فردي فإن $PGCD(n\,;2)=1$

3 ــ نجري القسمة الإقليدية كما يلي :

$$\begin{array}{c|c} 3n^3+5n^2+2n & 3n+2 \\ 3n^3+2n^2 & n^2+n \\ 3n^2+2n & \\ 3n^2+2n & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 3n^2+8n+4 & 3n+2 \\ 3n^2+2n & n+2 \\ 6n+4 & \\ 6n+4 & \\ 0 & \end{array}$$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} (3n+2) \text{ قاسم لـ } 3n^3+5n^2+2n \\ (3n+2) \text{ قاسم لـ } 3n^2+8n+4 \end{array}\right\}$

إذن : $3n+2$ هو قاسم مشترك لـ $3n^3+5n^2+2n$ و $3n^2+8n+4$

أي : $\left.\begin{array}{l} 3n^3+5n^2+2n=(3n+2)(n^2+n) \\ 3n^2+8n+4=(3n+2)(n+2) \end{array}\right\}$

منه : $PGCD(3n^3+5n^2+2n\,;3n^2+8n+4)=(3n+2)\times PGCD(n^2+n\,;n+2)$

لكن حسب السؤال (2) فإن $PGCD(n^2+n\,;n+2)\in\{1\,;2\}$

إذن : $PGCD(3n^3+5n^2+2n\,;3n^2+8n+4)\in\{3n+2\,;2(3n+2)\}$ كمايلي :

إذا كان n زوجي : $PGCD(3n^3+5n^2+2n\,;3n^2+8n+4)=2(3n+2)$

إذا كان n فردي : $PGCD(3n^3+5n^2+2n\,;3n^2+8n+4)=3n+2$

5 ــ $PGCD(a\,;b)=41$ إذن : $3n+2=41$

منه : $3n=39$

أي $n=13$

منه : $\left.\begin{array}{l} \alpha=(13)^2+13=169+13=182 \\ \beta=13+2=15 \end{array}\right\}$

التمرين ــ 8

n عدد طبيعي . نضع $a=9n+1$ ؛ $b=9n-1$

1 ــ أوجد علاقة بين a و b مستقلة عن n

2 ــ عين $PGCD(a\,;b)$ في حالة n عدد زوجي ثم في حالة n عدد فردي .

3 ــ إستنتج باقي قسمة العدد $81n^2$ على 4 في حالة n عدد فردي .

الحـل ــ 8

1 ــ $a-b=9n+1-(9n-1)=9n+1-9n+1=2$

نتيجة : من أجل كل n من N : $a-b=2$

2 ــ ليكن $PGCD(a\,;b)=\Delta$

$\left.\begin{array}{l} \Delta|_a \\ \Delta|_b \end{array}\right\}$ إذن : $\Delta|_{a-b}$ أي $\Delta|_2$ منه $\Delta\in\{1\,;2\}$

ليكن n فردي إذن : $n=2k+1$ حيث $k\in N$

منه : $\left.\begin{array}{l} a=9(2k+1)+1 \\ b=9(2k+1)-1 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} a=18k+10 \\ b=18k+8 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} a=2(9k+5) \\ b=2(9k+4) \end{array}\right\}$

إذن : $PGCD(a ; b) = 2$

ليكن n زوجي إذن : $n = 2k$ حيث $k \in N$

منه : $\left.\begin{array}{l} a = 9(2k) + 1 \\ b = 9(2k) - 1 \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} a = 18k + 1 \\ b = 18k - 1 \end{array}\right\}$ أي $\left.\begin{array}{l} a \text{ فردي} \\ b \text{ فردي} \end{array}\right.$

إذن : $PGCD(a ; b) = 1$

خلاصة : إذا كان n زوجي فإن $PGCD(a ; b) = 1$

إذا كان n فردي فإن $PGCD(a ; b) = 2$

3 ــ n عدد فردي إذن : $n = 2k + 1$ حيث $k \in N$

منه :

$$81 n^2 = 81(2k + 1)^2 = 81(4k^2 + 4k + 1) = 4 \times 81 k^2 + 4 \times 81 k + 81$$
$$= 4 \times 81 k^2 + 4 \times 81 k + 80 + 1$$
$$= 4(81 k^2 + 81 k + 20) + 1$$
$$= 4k' + 1 \quad \text{حيث} \quad k' = 81 k^2 + 81 k + 20$$

إذن : باقي قسمة $81 n^2$ على 4 هو 1 من أجل n فردي .

<u>التمرين ــ 9</u>

n عدد طبيعي . نضع $a = 7n^2 + 4$ ؛ $b = n^2 + 1$

1 ــ برهن أن كل قاسم مشترك للعددين a و b هو قاسم لــ 3

2 ــ إشرح لماذا يكون $PGCD(a ; b) = 3$ في حالة $n^2 = 3k - 1$

3 ــ بين باستعمال فصل الحالات أن هذا غير ممكن .

4 ــ إستنتج $PGCD(a ; b)$

<u>الحــل ــ 9</u>

1 ــ ليكن Δ قاسم مشترك لــ a و b

$\left.\begin{array}{l} \Delta | a \\ \Delta | b \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} \Delta | a \\ \Delta | 7b \end{array}\right\}$ إذن $\Delta | 7b - a$ أي $\Delta | 7(n^2 + 1) - (7n^2 + 4)$

منه : $\Delta | 3$ و هو المطلوب .

2 ــ في حالة $PGCD(a ; b) = 3$ فإن 3 يقسم b أي : $b = 3k$ حيث $k \in N$

منه : $n^2 + 1 = 3k$ أي $n^2 = 3k - 1$ و هو المطلوب

3 ــ لنثبت أن من أجل كل n من N فإن n^2 لا يكتب من الشكل $3k - 1$

الحالة (1) $n = 3p$

إذن : $n^2 = 9p^2 = 3(3p^2) = 3k$

الحالة (2) $n = 3p + 1$

إذن : $n^2 = (3p + 1)^2 = 9p^2 + 6p + 1 = 3(3p^2 + 2p) + 1 = 3k + 1$

الحالة (3) $n = 3p + 2$

إذن : $n^2 = (3p + 2)^2 = 9p^2 + 12p + 4 = 9p^2 + 12p + 3 + 1 = 3(3p^2 + 4p + 1) + 1 = 3k + 1$

خلاصة : في كل الحالات العدد n^2 لا يكتب من الشكل $3k - 1$

4 ــ بما أن العدد n^2 لا يمكن أن يكتب من الشكل $3k - 1$ فإن $n^2 + 1$ لا يمكن أن يكتب من الشكل $3k$

أي العدد 3 لا يمكن أن يقسم b

منه : $PGCD(a ; b) \neq 3$

أي : $PGCD(a ; b) = 1$ العددين (a و b أوليين فيما بينهما)

<u>التمرين ــ 10</u>

x و y عددين طبيعيين غير معدومين أوليين فيما بينهما

نضع $p = xy$ و $s = x + y$

1 ــ برهن أن x و s أوليان فيما بينهما و أن y و s أوليان فيما بينهما

2 ــ باستعمال البرهان بالخلف برهن أن s و p أوليان فيما بينهما

3 ــ برهن أن العددين s و p من شفعيتين مختلفتين أحدهما زوجي و الآخر فردي

4 ــ عين القواسم الموجبة للعدد 84

5 ــ عين الأعداد الأولية فيما بينها x و y حيث $x\,y = 84$

6 ــ عين عددين طبيعيين a و b يحققان الشرطان التاليان $\begin{cases} a + b = 84 \\ a\,b = d^2 \end{cases}$ حيث $d = PGCD(a\,;\,b)$

الحــل ــ 10

1 ــ x و y أوليان فيما بينهما إذن حسب بيزو فإن توجد ثنائية $(\alpha\,;\,\beta)$ من الأعداد الصحيحة حيث $1 = \alpha\,x + \beta\,y$ ....(1)

لدينا $s = x + y$ إذن : $\begin{cases} \alpha\,s = \alpha\,x + \alpha\,y \text{ .... (2)} \\ \beta\,s = \beta\,x + \beta\,y \text{ .... (3)} \end{cases}$

بطرح (2) من (1) نحصل على : $1 - \alpha\,s = \alpha\,x + \beta\,y - \alpha x - \alpha\,y$

أي : $1 - \alpha\,s = (\beta - \alpha)\,y$

أي : $1 = \alpha\,s + (\beta - \alpha)\,y$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha\,;\,\beta - \alpha)$ من الأعداد الصحيحة حيث $1 = \alpha\,s + (\beta - \alpha)\,y$ إذن : s و y أوليان فيما بينهما .

بطرح (3) من (1) نحصل على : $1 - \beta\,s = \alpha\,x + \beta\,y - \beta\,x - \beta\,y$

أي $1 - \beta\,s = (\alpha - \beta)\,x$

أي $1 = \beta\,s + (\alpha - \beta)\,x$

إذن : توجد ثنائية $(\beta\,;\,\alpha - \beta)$ من الأعداد الصحيحة حيث $1 = \beta\,s + (\alpha - \beta)\,x$

إذن : s و x أوليان فيما بينهما .

خلاصة : s و x أوليان فيما بينهما .
s و y أوليان فيما بينهما .

2 ــ ليكن $PGCD(s\,;\,p) = \Delta$ حيث $\Delta > 1$

$\begin{cases} \Delta \mid s \\ \Delta \mid p \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \Delta \mid x + y \\ \Delta \mid x\,y \end{cases}$

منه $\begin{cases} \Delta \mid x^2 + x\,y \\ \Delta \mid x\,y \end{cases}$

أي $\Delta \mid x^2 + x\,y - x\,y$

أي $\Delta \mid x^2$ تناقض لأن $PGCD(x\,;\,s) = 1$

منه : العددين s و p أوليان فيما بينهما .

3 ــ p و s أوليان فيما بينهما إذن : لا يمكن أن يكونا زوجيين معا .

هل يمكن أن يكون p فردي و s فردي ؟

إذا كان p فردي فإن x فردي و y فردي إذن s زوجي

منه : لا يمكن أن يكون p فردي و s فردي .

خلاصة : العددين s و p من شفعيتين مختلفتين .

4 ــ قواسم 84 الموجبة هي : $\{1\,;2\,;3\,;4\,;6\,;7\,;12\,;14\,;21\,;28\,;42\,;84\}$

5 ــ $\begin{cases} x\,y = 84 \\ x \text{ و } y \text{ أوليان فيما بينهما} \end{cases}$ إذن : $(x\,;\,y) \in \{(1\,;\,84)\,;\,(3\,;\,28)\,;\,(4\,;\,21)\,;\,(7\,;\,12)\,;\,(12\,;\,7)\,;\,(21\,;\,4)\,;\,(28\,;\,3)\,;\,(84\,;\,1)\}$

6 ــ $\begin{cases} a + b = 84 \\ a\,b = d^2 \end{cases}$

نضع $\begin{cases} a = d\,x \\ b = d\,y \end{cases}$ حيث $PGCD(x\,;\,y) = 1$

إذن $\begin{cases} d\,x + d\,y = 84 \\ d\,x\,d\,y = d^2 \end{cases}$

أي $\left.\begin{array}{l} d(x+y)=84 \\ x\,y\,d^2=d^2 \end{array}\right\}$

أي $\left.\begin{array}{l} d(x+y)=84 \\ x\,y=1 \end{array}\right\}$

منه $x=y=1$

إذن : $2\,d=84$ أي $d=42$

منه : $a=42$ و $b=42$

تحقيق : $PGCD(42\,;\,42)=42$

إذن : $d=42$ منه : $d^2=42\times 42$

التمرين ـــ 11

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع : $S_n=1^3+2^3+\dots\dots\dots+n^3$

1 ـــ برهن بالتراجع أن من أجل كل n من N^* : $S_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

2 ـــ تحقق أن : $PGCD(k\,;\,k+1)=1$ حيث $k\in N^*$

3 ـــ برهن أن من أجل $k\in N^*$ فإن : $PGCD(S_{2k}\,;\,S_{2k+1})=(2\,k+1)^2$

4 ـــ عين $PGCD(2\,k+1\,;\,2\,k+3)$ من أجل $k\in N^*$

5 ـــ أحسب $PGCD(S_{2k+1}\,;\,S_{2k+2})$ من أجل $k\in N$

6 ـــ إستنتج حسب قيم العدد الطبيعي n : $PGCD(S_n\,;\,S_{n+1})$

ملاحظة : في هذا التمرين يمكن إستعمال النتيجة التالية : $PGCD(a\,;\,b)=1$ يكافئ $PGCD(a^2\,;\,b^2)=1$

الحـل ـــ 11

1 ـــ البرهان بالتراجع : لتكن الخاصية : $1+2^3+3^3+\dots\dots\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

من أجل $n=1$: $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=\left[\frac{1(2)}{2}\right]^2=1$

إذن الخاصية محققة من أجل $n=1$.

نفرض أن : $1+2^3+3^3+\dots\dots\dots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ من أجل $n>1$

هل $1+2^3+\dots\dots\dots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$ ؟

$$1+2^3+\dots\dots\dots+n^3+(n+1)^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+(n+1)^3$$

$$=(n+1)^2\left[\left(\frac{n}{2}\right)^2+n+1\right]$$

$$=(n+1)^2\left(\frac{n^2+4\,n+4}{4}\right)$$

$$=(n+1)^2\,\frac{(n+2)^2}{4}$$

$$=\left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

نتيجة : من أجل كل $n\in N^*$: $S_n=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

2 ـــ من أجل كل k من N^* لدينا : $(k+1)+(-1)\,k=1$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha\,;\,\beta)=(1\,;\,-1)$ من الأعداد الصحيحة

تحقق $\alpha(k+1)+\beta\,k=1$

منه : حسب بيزو فإن $PGCD(k+1\,;\,k)=1$

3 ــ ليكن $k \in N^*$:

$$S_{2k}=\left[\frac{2k(2k+1)}{2}\right]^2=k^2(2k+1)^2$$

$$S_{2k+1}=\left[\frac{(2k+1)(2k+2)}{2}\right]^2=\left[\frac{2(k+1)(2k+1)}{2}\right]^2=(k+1)^2(2k+1)^2$$

إذن :

$$PGCD(S_{2k}\,;\,S_{2k+1})=PGCD(k^2(2k+1)^2\,;\,(k+1)^2(2k+1)^2)$$
$$=(2k+1)^2\,PGCD(k^2\,;\,(k+1)^2)$$
$$=(2k+1)^2\,PGCD(k\,;\,k+1) \quad \text{لأن } PGCD(k\,;\,k+1)=1$$
$$=(2k+1)^2$$

4 ــ بإجراء القسمة الإقليدية :

$$\begin{array}{c|c} 2k+3 & 2k+1 \\ \hline 2k+1 & 1 \\ 2 & \end{array}$$

$PGCD(2k+3\,;\,2k+1)=PGCD(2k+1\,;\,2)$

لكن من أجل كل k من N فإن $(2k+1)$ فردي .

إذن : $PGCD(2k+1\,;\,2)=1$

منه : $PGCD(2k+3\,;\,2k+1)=1$

5 ــ

$$S_{2k+1}=(k+1)^2(2k+1)^2$$

$$S_{2k+2}=\left[\frac{(2k+2)(2k+3)}{2}\right]^2=\left[\frac{2(k+1)(2k+3)}{2}\right]^2=(k+1)^2(2k+3)^2$$

إذن :

$$PGCD(S_{2k+1}\,;\,S_{2k+2})=PGCD((k+1)^2(2k+1)^2\,;\,(k+1)^2(2k+3)^2)$$
$$=(k+1)^2\,PGCD((2k+1)^2\,;\,(2k+3)^2)$$
$$=(k+1)^2 \quad \text{لأن } PGCD(2k+1\,;\,2k+3)=1$$

6 ــ نميز حالتين :

الأولى : n زوجي إذن : $n=2k$ منه

$$PGCD(S_n\,;\,S_{n+1})=PGCD(S_{2k}\,;\,S_{2k+1})=(2k+1)^2=(n+1)^2$$

الثانية : n فردي إذن : $n=2k+1$ منه

$$PGCD(S_n\,;\,S_{n+1})=PGCD(S_{2k+1}\,;\,S_{2k+2})=(k+1)^2=\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

التمرين ــ 12

n عدد طبيعي غير معدوم .

نسمي (E) مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكتب من الشكل $9+a^2$ حيث $a \in N^*$

لتكن المعادلة $9+a^2=2^n$ .....(I) ذات المجهول a حيث n عدد طبيعي أكبر من 3 .

1 ــ برهن أن إذا كان a حلا للمعادلة (I) فإن a فردي .

2 ــ باستعمال القسمة على 4 برهن أن المعادلة (I) لا تقبل حلا .

لتكن المعادلة $9+a^2=3^n$ .....(II) ذات المجهول a حيث n عدد طبيعي أكبر من 2

3 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل n من N^* : $3^{2n}-1$ يقبل القسمة على 4

4 ــ إستنتج بواقي القسمة الإقليدية لــ 3^{2n} و 3^{2n+1} على 4

5 ــ برهن أن إذا كان a حلا للمعادلة (II) فإن a زوجي و إستنتج أن n زوجي .

6 ــ حلل العدد $3^{2p}-a^2$ ثم إستنتج أن المعادلة (II) لا تقبل حلا

لتكن المعادلة $9+a^2=5^n$ .....(III) ذات المجهول a و n عدد طبيعي أكبر من 1

7 ــ باستعمال القسمة على 3 برهن أن إذا كان n فردي فإن المعادلة (III) لا تقبل حلا .

8 ــ في حالة n زوجي برهن أن يوجد عدد طبيعي وحيد a حيث يكون العدد $9+a^2$ من قوى العدد 5

الحــل ــ 12

1 ــ ليكن a حل للمعادلة (I) إذن : $9+a^2=2^n$

منه : $9=2^n-a^2$

إذا كان a زوجي نضع $a=2k$ حيث $k \in N$

منه : $9=2^n-(2k)^2$

أي $9=2^n-4k^2$

أي $9 = 2(2^{n-1} - 2k^2)$ تناقض لأن 2 لا يقسم 9

نتيجة : a ليس زوجي

إذن : إذا كان a حل للمعادلة (I) فإن a فردي

2 ــ ليكن a حل للمعادلة I إذن : $a = 2k + 1$ حيث $k \in N$

المعادلة (I) تكافئ $9 + (2k+1)^2 = 2^n$

تكافئ $9 + 4k^2 + 4k + 1 = 2^n$

تكافئ $10 + 4k^2 + 4k = 2^n$

تكافئ $10 = 2^n - 4k^2 - 4k$

تكافئ $10 = 4(2^{n-2} - k^2 - k)$ تناقض لأن 4 لا يقسم 10

نتيجة : $a = 2k + 1$ لا يمكن أن يكون حلا للمعادلة (I)

خلاصة : المعادلة (I) لا تقبل حلولا .

3 ــ **البرهان بالتراجع :** من أجل $n > 2$: $3^{2n} - 1$ مضاعف 4

من أجل $n = 3$: $3^{2(3)} - 1 = 3^6 - 1 = 729 - 1 = 728$

بما أن $728 = 4 \times 182$ فإن الخاصية صحيحة من أجل $n = 3$

نفرض أن $3^{2n} - 1$ مضاعف 4 من أجل $n > 3$ أي $3^{2n} - 1 = 4k$

هل $3^{2(n+1)} - 1$ مضاعف 4 ؟

$$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n} \times 3^2 - 1$$
$$= 9 \times 3^{2n} - 1$$
$$= 8 \times 3^{2n} + 3^{2n} - 1$$
$$= 8 \times 3^{2n} + 4k$$ حسب فرضية التراجع $3^{2n} - 1 = 4k$
$$= 4(2 \times 3^{2n} + k)$$
$$= 4k'$$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل $n > 2$ فإن $3^{2n} - 1$ مضاعف 4

4 ــ $3^{2n} - 1 = 4k$ إذن : $3^{2n} = 4k + 1$ منه باقي قسمة 3^{2n} على 4 هو 1

$3^{2n+1} = 3 \times 3^{2n}$ إذن : $3^{2n+1} = 3(4k+1)$ لأن $3^{2n} = 4k + 1$

منه : $3^{2n+1} = 12k + 3$

أي : $3^{2n+1} = 4k' + 3$ حيث $k' = 3k$

إذن : باقي قسمة 3^{2n+1} على 4 هو 3

5 ــ ليكن a حل للمعادلة (II)

إذا كان a فردي نضع $a = 2k + 1$ حيث $k \in N$

المعادلة (II) تكافئ : $9 + (2k+1)^2 = 3^n$

تكافئ $9 + 4k^2 + 4k + 1 = 3^n$

تكافئ $10 + 4k^2 + 4k = 3^n$

تكافئ $\begin{cases} 10 + 4k^2 + 4k = 4q + 1 \\ \text{أو} \\ 10 + 4k^2 + 4k = 4q + 3 \end{cases}$ إذا كان n زوجي . / إذا كان n فردي .

تكافئ $\begin{cases} 9 = 4(q - k^2 - k) \\ \text{أو} \\ 7 = 4(q - k^2 - k) \end{cases}$ إذا كان n زوجي . / إذا كان n فردي .

لكن 4 لا يقسم 9 و 4 لا يقسم 7

إذن : تناقض

منه : a ليس فردي

نتيجة : إذا كان a حل للمعادلة (II) فإن a زوجي .

في هذه الحالة $a = 2k$

إذن : المعادلة تكافئ $9 + 4k^2 = 3^n$

تكافئ $\begin{cases} 9 + 4k^2 = 4q + 1 \\ \text{أو} \\ 9 + 4k^2 = 4q + 3 \end{cases}$ إذا كان n زوجي . / إذا كان n فردي .

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 8 = 4(q - k^2) \text{ إذا كان } n \text{ زوجي .} \\ \text{أو } 6 = 4(q - k^2) \text{ إذا كان } n \text{ فردي .}\end{array}\right.$

لكن 4 لا يقسم 6 إذن : n ليس فردي

منه : n زوجي

6 ــ $3^{2p} - a^2 = (3^p - a)(3^p + a)$

ليكن a حل للمعادلة (II) حيث $n = 2p$ $(p \neq 0)$

المعادلة (II) تكافئ $9 = 3^{2p} - a^2$

تكافئ $9 = (3^p - a)(3^p + a)$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 3^p - a = 1 \\ 3^p + a = 9\end{array}\right.$ لأن $p \neq 0$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 2 \times 3^p = 10 \\ a = 9 - 3^p\end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 3^p = 5 \\ a = 9 - 3^p\end{array}\right.$ تناقض . لأن 3 لا يقسم 5

نتيجة : المعادلة (II) لا تقبل حلولا

7 ــ ليكن n فردي إذن : $n = 2k + 1$ حيث $k \in N^*$ لأن $n > 2$

المعادلة (III) تكافئ $9 + a^2 = 5^{2k+1}$

تكافئ $9 = 5^{2k+1} - a^2$ تناقض لأن $5^{2k+1} - a^2$ لا يقبل القسمة على 3

إذن : إذا كان n فردي فإن المعادلة (III) لا تقبل حلا

8 ــ ليكن n زوجي حيث $n = 2k$

المعادلة (III) تكافئ $9 + a^2 = 5^{2k}$

تكافئ $9 = (5^k - a)(5^k + a)$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 5^k - a = 1 \\ 5^k + a = 9\end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 2 \times 5^k = 10 \\ a = 5^k - 1\end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} 5^k = 5 \\ a = 5^k - 1\end{array}\right.$

تكافئ $\left\{\begin{array}{l} k = 1 \\ a = 4\end{array}\right.$

نتيجة : المعادلة $9 + a^2 = 5^n$ تقبل حلا وحيدا $a = 4$

إذن : يوجد عدد طبيعي وحيد a حيث يكون $9 + a^2$ من قوى العدد 5

التمرين ــ 13

a عدد طبيعي أكبر تماما من 1 و k عدد طبيعي كيفي .

1 ــ أثبت أن إذا كان d قاسم للعددين $(a^k - 1)$ و $a^{k+1} - 1$ فإن d قاسم للعدد $a^k(a - 1)$

2 ــ أعط القيم الممكنة لــ $PGCD(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1)$

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بــ $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 0 \ ; \ u_1 = 1 \\ \text{من أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n\end{array}\right.$

3 ــ تحقق أن العددين u_2 و u_3 أوليان فيما بينهما .

4 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

5 ــ برهن أن من اجل كل عدد طبيعي n : u_n هو عدد طبيعي

6 ــ عين $PGCD(u_n ; u_{n+1})$

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بــ $v_n = u_n + \frac{1}{3}$

7 ــ برهن أن (v_n) متتالية هندسية ثم أحسب u_n بدلالة n

8 ــ إستنتج $PGCD(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1)$

الحــل ــ 13

1 ــ ليكن d قاسم للعددين $a^k - 1$ و $a^{k+1} - 1$

إذن : d قاسم لــ $(a^{k+1} - 1) - (a^k - 1)$

منه : d قاسم لــ $a^{k+1} - a^k$

أي : d قاسم لــ $a^k(a-1)$

2 ــ ليكن $PGCD(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1) = \Delta$

$\left.\begin{array}{l}\Delta \mid 4^{k+1} - 1 \\ \Delta \mid 4^k - 1\end{array}\right\}$ إذن : $\Delta \mid 4^{k+1} - 1 - (4^k - 1)$

أي $\Delta \mid 4^{k+1} - 4^k$

أي $\Delta \mid 4^k(4-1)$

أي $\Delta \mid 3 \times 4^k$

نتيجة : القيم الممكنة لــ $PGCD(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1)$ هي قواسم العدد 3×4^k

3 ــ $u_2 = 5u_1 - 4u_0 = 5 - 0 = 5$

$u_3 = 5u_2 - 4u_1 = 5(5) - 4(1) = 21$

$PGCD(5 ; 21) = 1$ إذن : u_2 و u_3 أوليان فيما بينهما .

4 ــ البرهان بالتراجع عن الخاصية : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

من أجل $n = 0$: $u_1 = 1 = 4(0) + 1$

إذن : $u_1 = 4u_0 + 1$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

من أجل $n = 1$: $u_2 = 5 = 4(1) + 1$

إذن : $u_2 = 4u_1 + 1$

منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن : $u_{n+1} = 4u_n + 1$ من أجل $n > 1$

هل $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 1$ ؟

لدينا : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n$ .... (1)

لكن حسب فرضية التراجع : $u_{n+1} = 4u_n + 1$ منه $4u_n = u_{n+1} - 1$

منه : المساواة (1) تصبح : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - (u_{n+1} - 1)$

أي : $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 1$

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

5 ــ البرهان بالتراجع عن الخاصية : u_n عدد طبيعي

من أجل $n = 0$ ؛ $n = 1$ ؛ $n = 2$ الخاصية محققة لأن u_0 ؛ u_1 ؛ u_2 **أعداد طبيعية**

نفرض أن u_n عدد طبيعي من أجل $n > 2$

هل u_{n+1} عدد طبيعي ؟

$u_n \in N$ إذن : $4 \times u_n \in N$

منه : $(4u_n + 1) \in N$ أي $u_{n+1} \in N$

أي الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن u_n عدد طبيعي .

6 ــ حسب السؤال (4) فإن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 4u_n + 1$

منه $u_{n+1} - 4u_n = 1$

إذن : توجد ثنائية $(\alpha ; \beta) = (1 ; -4)$ من الأعداد الصحيحة حيث $\alpha u_{n+1} + \beta u_n = 1$

إذن : حسب بيزو فإن u_{n+1} و u_n أوليان فيما بينهما

أي $PGCD(u_{n+1} ; u_n) = 1$

7 ــ $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{3}$

$= (4 u_n + 1) + \frac{1}{3}$

$= 4 u_n + \frac{4}{3}$

$= 4\left(u_n + \frac{1}{3}\right)$

$= 4 v_n$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها 4 و حدها الأول $v_0 = u_0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

منه : $v_n = \frac{1}{3}(4)^n$

أي : $u_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4)^n$

منه : $u_n = \frac{1}{3}(4)^n - \frac{1}{3}$

أي $u_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)$

8 ـــ حسب السؤال (7) فإن :

$$\begin{cases} u_k = \frac{1}{3}(4^k - 1) \\ u_{k+1} = \frac{1}{3}(4^{k+1} - 1) \end{cases} \quad \text{منه} \quad \begin{cases} 3 u_k = 4^k - 1 \\ 3 u_{k+1} = 4^{k+1} - 1 \end{cases}$$

إذن : $PGCD(4^{k+1} - 1 ; 4^k - 1) = PGCD(3 u_{k+1} ; 3 u_k)$

$= 3\, PGCD(u_{k+1} ; u_k)$

$= 3$ لأن $PGCD(u_{k+1} ; u_k) = 1$

التمرين ـــ 14

نقول عن العدد الطبيعي p أنه أولي إذا وفقط إذا قبل قاسمين بالضبط هما 1 و p

نعتبر في المجموعة N^2 المعادلة $x^2 + y^2 = p^2$ .....(E) ذات المجهولين الطبيعيين x و y حيث p عدد طبيعي أولي

1 ـــ نضع $p = 2$ بين أن المعادلة (E) لا تقبل حلولا في $N^* \times N^*$

نفرض أن $p \neq 2$ و $(x ; y)$ حل للمعادلة (E)

2 ـــ برهن أن العددين x و y أحدهما زوجي و الآخر فردي .

3 ـــ برهن أن p لا يقسم x و لا يقسم y .

4 ـــ برهن أن $PGCD(x^2 ; y^2)$ يقسم p^2

5 ـــ إستنتج أن العددين x و y أوليان فيما بينهما .

نفرض أن p هو مجموع مربعين تامين غير معدومين أي $p = u^2 + v^2$ حيث u و v عددين طبيعيين غير معدومين

6 ـــ تحقق أن الثنائية $(|u^2 - v^2| ; 2 u v)$ حل للمعادلة (E)

7 ـــ أعط حلا للمعادلة (E) من أجل $p = 5$ ثم في حالة $p = 13$

الحـــل ـــ 14

1 ـــ من أجل $p = 2$ المعادلة (E) تكافئ $x^2 + y^2 = 4$

تكافئ $x^2 = 4 - y^2$

تكافئ $x^2 = (2 - y)(2 + y)$

إذن : $2 - y > 0$ لأن $x^2 > 0$

منه : $y < 2$

أي : $y = 1$ لأن y غير معدوم .

لكن من أجل $y = 1$ نحصل على : $x^2 = 3$ إذن : لا يوجد x من N^* يحقق المعادلة

نتيجة : المعادلة (E) لا تقبل حلولا في $N^* \times N^*$ من أجل $p = 2$

2 ـــ إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $x^2 + y^2 = p^2$

لدينا p فردي لأن (p أولي و $p \neq 2$) إذن : p^2 فردي

إذا كان x زوجي و y زوجي فإن x^2 زوجي و y^2 زوجي أي $x^2 + y^2$ زوجي . تناقض

إذا كان x فردي و y فردي فإن x^2 فردي و y^2 فردي أي $x^2 + y^2$ زوجي . تناقض
نتيجة : إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن x و y أحدهما زوجي و الآخر فردي

3 ـ لنفرض أن p يقسم x $(x \neq 0)$

إذن : يوجد عدد طبيعي α حيث $x = p\alpha$ منه $x^2 = p^2\alpha^2$

إذن : المعادلة (E) تكافئ $p^2\alpha^2 + y^2 = p^2$

تكافئ $y^2 = p^2 - p^2\alpha^2$

تكافئ $y^2 = p^2(1 - \alpha^2)$

تكافئ $y^2 = p^2(1 - \alpha)(1 + \alpha)$

لكن $y^2 > 0$ إذن : $1 - \alpha > 0$

أي $\alpha < 1$

أي $\alpha = 0$

منه $x = 0$ تناقض . إذن : p لا يقسم x

لنفرض الآن أن p يقسم y $(y \neq 0)$

إذن : يوجد عدد طبيعي α حيث $y = p\alpha$ منه $y^2 = p^2\alpha^2$

إذن : المعادلة (E) تكافئ $x^2 + p^2\alpha^2 = p^2$

تكافئ $x^2 = p^2(1 - \alpha^2)$

تكافئ $x^2 = p^2(1 - \alpha)(1 + \alpha)$

إذن : $1 - \alpha > 0$ لأن $x^2 > 0$

إذن : $\alpha < 1$

منه $\alpha = 0$ أي $y = 0$ تناقض إذن : p لا يقسم y

نتيجة : إذا كان $(x ; y)$ حلا للمعادلة (E) فإن p لا يقسم x و لا يقسم y

4 ـ ليكن $PGCD(x^2 ; y^2) = \Delta$

إذن : $\begin{cases} \Delta \mid x^2 \\ \Delta \mid y^2 \end{cases}$ $\Delta \mid x^2 + y^2$ منه $\Delta \mid p^2$ و هو المطلوب

5 ـ حسب السؤال (4) فإن $PGCD(x^2 ; y^2)$ يقسم p^2

إذن : $PGCD(x^2 ; y^2) \in \{1 ; p ; p^2\}$ لأن p أولي إذن قواسم p^2 هي $\{1 ; p ; p^2\}$

لكن p لا يقسم x و لا يقسم y

إذن p لا يقسم x^2 و لا يقسم y^2

منه : $PGCD(x^2 ; y^2) \neq p$ و $PGCD(x^2 ; y^2) \neq p^2$

أي $PGCD(x^2 ; y^2) = 1$

منه : $PGCD(x ; y) = 1$

أي : x و y أوليان فيما بينهما .

6 ـ ليكن $p = u^2 + v^2$ حيث $u \geq v$ إذن : $|u^2 - v^2| = u^2 - v^2$

لدينا : $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2$

$= u^4 + 2u^2v^2 + v^4$

$= (u^2 + v^2)^2$

$= p^2$

إذن : الثنائية $(|u^2 - v^2| ; 2uv)$ حل للمعادلة (E)

7 ـ من أجل $p = 5$ لدينا : $(4)^2 + (3)^2 = 16 + 9$

$= 25$

$= (5)^2$

إذن : $(4 ; 3)$ حل للمعادلة (E)

من أجل $p = 13$ لدينا : $(12)^2 + (5)^2 = 144 + 25$

$= 169$

$= (13)^2$

إذن : $(12 ; 5)$ حل للمعادلة (E)

التمرين ــ 15

لتكن (x_n) و (y_n) متتاليتين معرفتين بـــ $x_0 = 1$ ؛ $y_0 = 8$ و من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3} x_n + \frac{1}{3} y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3} x_n + \frac{8}{3} y_n + 5 \end{cases}$$

في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O ; \vec{I} ; \vec{J})$ نعتبر المستقيم (Δ) ذو المعادلة $5x - y + 3 = 0$

1 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن النقطة $M_n(x_n ; y_n)$ تنتمي إلى المستقيم (Δ)

2 ــ إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $x_{n+1} = 4x_n + 2$

3 ــ برهن أن من أجل كل عدد طبيعي n فإن $x_n \in \mathbb{N}$

4 ــ إستنتج أن $y_n \in \mathbb{N}$

نضع $PGCD(x_n ; y_n) = d$

5 ــ ما هي القيم الممكنة لـــ d

6 ــ برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n : $x_n = \frac{5}{3} \times 4^n - \frac{2}{3}$

7 ــ إستنتج أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $5 \times 4^n - 2$ مضاعف 6

الحـل ــ 15

1 ــ لتكن الخاصية : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: النقطة $M_n(x_n ; y_n)$ تنتمي إلى (Δ)

من أجل $n = 0$: $x_0 = 1$ ؛ $y_0 = 8$

$5(1) - (8) + 3 = -3 + 3 = 0$ إذن : $M_0(x_0 ; y_0)$ تنتمي إلى (Δ)

من أجل $n = 1$:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3}(1) + \frac{1}{3}(8) + 1 = 6 \\ y_1 = \frac{20}{3}(1) + \frac{8}{3}(8) + 5 = 33 \end{cases}$$

$5(6) - (33) + 3 = 33 - 33 = 0$ إذن : $M_1(x_1 ; y_1)$ تنتمي إلى (Δ)

إذن : الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$ و $n = 1$

نفرض أن النقطة $M_n(x_n ; y_n)$ تنتمي إلى (Δ) من أجل $n > 1$

هل النقطة $M_{n+1}(x_{n+1} ; y_{n+1})$ تنتمي إلى (Δ) ؟

$$5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 5\left(\frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1\right) - \left(\frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5\right) + 3$$
$$= \frac{35}{3}x_n + \frac{5}{3}y_n + 5 - \frac{20}{3}x_n - \frac{8}{3}y_n - 5 + 3$$
$$= \frac{15}{3}x_n - \frac{3}{3}y_n + 3$$
$$= 5x_n - y_n + 3$$

$= 0$ لأن $M_n(x_n ; y_n)$ تنتمي إلى (Δ)

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

خلاصة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن النقطة $M_n(x_n ; y_n)$ تنتمي الى (Δ)

2 ــ $M_{n+1}(x_{n+1} ; y_{n+1})$ تنتمي إلى (Δ) إذن : $5x_{n+1} - y_{n+1} + 3 = 0$

منه : $y_{n+1} = 5x_{n+1} + 3$

لكن : $y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5$

منه : $5x_{n+1} + 3 = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5$

أي $5x_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 2$ ....(1)

من جهة أخرى لدينا $5x_n - y_n + 3 = 0$

إذن : $y_n = 5x_n + 3$

منه المساواة (1) تصبح : $5x_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}(5x_n + 3) + 2$

أي : $5x_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{40}{3}x_n + 8 + 2$

أي : $5x_{n+1} = \frac{60}{3}x_n + 10$

أي : $5x_{n+1} = 20x_n + 10$

منه : $x_{n+1} = 4x_n + 2$

3 ــ لتكن الخاصية من أجل كل عدد طبيعي n : $x_n \in N$ (بالتراجع)

من أجل $n = 0$ الخاصية محققة لأن $1 \in N$ و $x_0 = 1$

من أجل $n = 1$ الخاصية محققة لأن $6 \in N$ و $x_1 = 6$

نفرض أن $x_n \in N$ من أجل $n > 1$

هل $x_{n+1} \in N$ ؟

لدينا : $x_n \in N$ إذن : $4x_n \in N$

منه : $4x_n + 2 \in N$

أي $x_{n+1} \in N$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي n فإن $x_n \in N$

4 ــ لدينا : $5x_n - y_n + 3 = 0$ إذن : $y_n = 5x_n + 3$

منه : $y_n \in N$ لأن $(x_n \in N)$

5 ــ ليكن $PGCD(x_n ; y_n) = d$

$\left.\begin{array}{l} d|x_n \\ d|y_n \end{array}\right\}$ إذن : $\left.\begin{array}{l} d|5x_n \\ d|y_n \end{array}\right\}$ إذن : $d|5x_n - y_n$

لكن $5x_n - y_n + 3 = 0$

أي $5x_n - y_n = -3$

منه : $d|-3$

أي $d|3$

إذن : القيم الممكنة لــ d هي $\{1 ; 3\}$

6 ــ لتكن الخاصية : من أجل كل n من N : $x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3}$ (بالتراجع)

من أجل $n = 0$: $x_0 = 1$

$\frac{5}{3}(4)^0 - \frac{2}{3} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ منه الخاصية صحيحة من أجل $n = 0$

من أجل $n = 1$: $x_1 = 6$

$\frac{5}{3}(4)^1 - \frac{2}{3} = \frac{20}{3} - \frac{2}{3} = \frac{18}{3} = 6$ إذن الخاصية صحيحة من أجل $n = 1$

نفرض أن : $x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3}$ من أجل $x > 1$

هل $x_{n+1} = \frac{5}{3} \times (4)^{n+1} - \frac{2}{3}$ ؟

لدينا حسب السؤال (2) : $x_{n+1} = 4x_n + 2$

منه : $x_{n+1} = 4\left[\frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3}\right] + 2$

أي : $x_{n+1} = \frac{5}{3} \times (4)^{n+1} - \frac{8}{3} + 2$

أي : $x_{n+1} = \frac{5}{3} \times (4)^{n+1} - \frac{2}{3}$

منه : الخاصية صحيحة من أجل $n + 1$

نتيجة : من أجل كل n من N : $x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3}$

7 ــ لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $x_n = \frac{5}{3} \times (4)^n - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}[5 \times 4^n - 2]$

بما أن $x_n \in N$ فإن العدد $5 \times 4^n - 2$ مضاعف 3

من جهة أخرى $5 \times 4^n - 2 = 5 \times 2^{2n} - 2 = 2(5 \times 2^{2n-1} - 1)$ إذن : $5 \times 4^n - 2$ مضاعف 2 $(n \neq 0)$

خلاصة : $\left.\begin{matrix} 5 \times 4^n - 2 \text{ مضاعف } 3 \\ 5 \times 4^n - 2 \text{ مضاعف } 2 \end{matrix}\right\}$

إذن : $5 \times 4^n - 2$ مضاعف 6 من أجل $n \neq 0$

حذار ! من أجل $n = 0$ فإن $5 \times 4^0 - 2 = 3$ إذن : $5 \times 4^n - 2$ ليس مضاعف 6

التمرين ــ 16

1 ــ x عدد طبيعي . برهن أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k :

$$(x - 1)(1 + x + x^2 + ... + x^{k-1}) = x^k - 1$$

2 ــ d و n عددان طبيعيان غير معدومان حيث d يقسم n

برهن أن من أجل كل عدد طبيعي a أكبر تماما من 1 العدد $a^d - 1$ يقسم العدد $a^n - 1$

3 ــ إستنتج أن العدد $2^{2010} - 1$ يقبل القسمة على 7 ثم على 63 ثم على 9

4 ــ عين $PGCD(63 ; 60)$

5 ــ بين أن : $(a^{63} - 1) - (a^{60} - 1)\, a^3 = a^3 - 1$

6 ــ برهن أن : $PGCD(a^{63} - 1 ; a^{60} - 1) = a^3 - 1$

7 ــ إستنتج قيمة $PGCD(2^{63} - 1 ; 2^{60} - 1)$

الحــل ــ 16

1 ــ من أجل $x = 0$ فإن : $(0 - 1)(1) = 0 - 1 = -1$ إذن الخاصية محققة.

من أجل $x = 1$ فإن : $(x - 1)(1) = 1 - 1 = 0$ إذن الخاصية محققة.

من أجل $x > 1$ فإن : $(x - 1)(1 + x + x^2 + ... + x^{k-1}) = (x - 1)\,\frac{x^k - 1}{x - 1}$

$= x^k - 1$ لأن $1 + x + x^2 + ... + x^{k-1}$ هو مجموع k حد من حدود متتالية هندسية أساسها x و حدها الأول 1

2 ــ d يقسم n إذن : يوجد k من N^* حيث $n = d\,k$

حسب السؤال الأول فإن : من أجل $x = a^d$ نحصل على :

$$(a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + ... + a^{dk-d}) = a^{dk} - 1$$

أي : $(a^d - 1)(1 + a^d + a^{2d} + ... + a^{dk-d}) = a^n - 1$

منه : $a^d - 1$ يقسم $a^n - 1$ لأن : $(1 + a^d + ... + a^{dk-d}) \in N$

نتيجة : من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم k فإن : $(x - 1)(1 + x + ... + x^{k-1}) = x^k - 1$.

3 ــ لدينا : $2^3 - 1 = 7$

نضع $d = 3$ و $n = 2010$ و $a = 2$

إذن : d يقسم n لأن 3 يقسم 2010

منه $a^d - 1$ يقسم $a^n - 1$

أي $a^3 - 1$ يقسم $a^{2010} - 1$

أي $2^3 - 1$ يقسم $2^{2010} - 1$

أي 7 يقسم $2^{2010} - 1$ و هو المطلوب

من جهة أخرى لدينا : $2^6 - 1 = 63$

نضع $d = 6$ و $n = 2010$ و $a = 2$

إذن : d يقسم n لأن 6 يقسم 2010

منه $a^d - 1$ يقسم $a^n - 1$

أي $2^6 - 1$ يقسم $2^{2010} - 1$

أي 63 يقسم $2^{2010} - 1$ و هو المطلوب

نتيجة : 63 يقسم $2^{2010} - 1$ و $63 = 7 \times 9$

إذن : 9 يقسم $2^{2010} - 1$.

4 ـ حسب خوارزمية إقليدس :

$$63 = 60 \times 1 + 3 \qquad 60 = 3 \times 20 + 0$$

إذن : $PGCD(63 ; 60) = 3$

5 ـ

$$(a^{63} - 1) - (a^{60} - 1)\, a^3 = a^{63} - 1 - a^{63} + a^3$$

$= a^3 - 1$ و هو المطلوب .

6 ـ ليكن $PGCD(a^{63} - 1 ; a^{60} - 1) = \Delta$

إذن : $\begin{cases} \Delta | a^{63} - 1 \\ \Delta | a^{60} - 1 \end{cases}$ منه $\begin{cases} \Delta | a^{63} - 1 \\ \Delta | a^3(a^{60} - 1) \end{cases}$ أي $\Delta | a^{63} - 1 - a^3(a^{60} - 1)$

أي $\Delta | a^3 - 1$ ....(1)

من جهة أخرى : لدينا حسب السؤال (2) : $\begin{cases} a^3 - 1 | a^{60} - 1 & \text{لأن 3 يقسم 60} \\ a^3 - 1 | a^{63} - 1 & \text{لأن 3 يقسم 63} \end{cases}$

إذن : $a^3 - 1 | \Delta$ ....(2)

نتيجة : $\Delta | a^3 - 1$ و $a^3 - 1 | \Delta$ إذن : $\Delta = a^3 - 1$

إذن : $\Delta = PGCD(a^{63} - 1 ; a^{60} - 1)$

أي : $PGCD(a^{63} - 1 ; a^{60} - 1) = a^3 - 1$

7 ـ بوضع $a = 2$ فإن : $PGCD(2^{63} - 1 ; 2^{60} - 1) = 2^3 - 1 = 7$

المستقيمات و المستويات في الفضاء

المستقيمات في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس. (D) مستقيم من الفضاء يشمل النقطة $A(x_A ; y_A ; z_A)$

و $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له

$M(x ; y ; z)$ نقطة من (D) إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي t حيث : $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$

أي : $\begin{cases} x - x_A = t\,a \\ y - y_A = t\,b \\ z - z_A = t\,c \end{cases}$ لأن $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix}$

منه $\begin{cases} x = x_A + t\,a \\ y = y_A + t\,b \\ z = z_A + t\,c \end{cases}$ هذه الجملة تسمى تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D)

تقاطع المستقيمات و المستويات :

(P) و (P') مستويان حيث $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان ناظميان لهما على الترتيب

(D) و (D') مستقيمان شعاعا توجيههماعلى الترتيب $\vec{n}$ و $\vec{m}$

الأوضاع النسبية الممكنة للمستقيمين (D) و (D') هي :

الحالة الأولى : (D) و (D') من مستويين مختلفين

إذن : (D) و (D') لا يتقاطعان .

الحالة الثانية : (D) و (D') من نفس المستوي إذن :

إما (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة

أو (D) و (D') متوازيان تماما . (لا يتقاطعان)

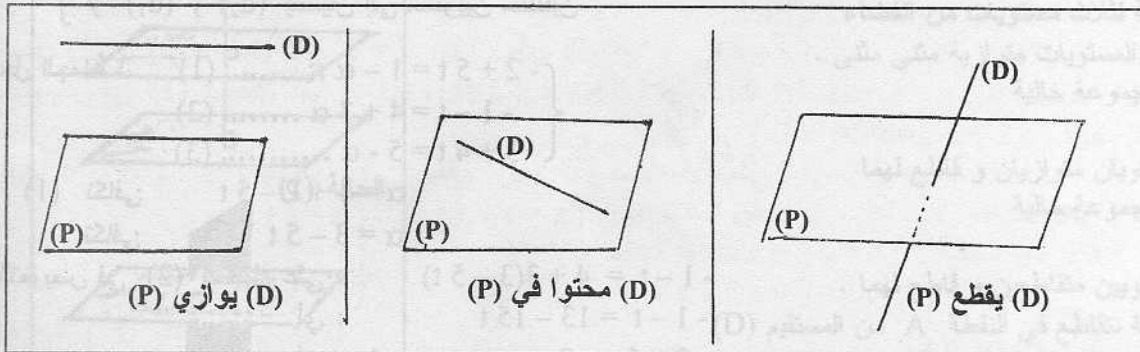
أو (D) و (D') متطابقان إذن تقاطعهما هو المستقيم (D) نفسه .

الأوضاع النسبية الممكنة لمستقيم (D) و مستوي (P) هي كما يلي :

الحالة الأولى : (D) محتوا في المستوي (P)

الحالة الثانية : (D) يقطع (P) في نقطة وحيدة

الحالة الثالثة : (D) يوازي (P) إذن لا يقطعه .

الانشاء :

نشـــاط :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$

1 ــ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB) حيث $A(2 ; 2 ; -3)$ ؛ $B(1 ; -1 ; 0)$

2 ــ هل النقطة $C(1 ; 3 ; 2)$ تنتمي إلى المستقيم (AB) ؟

الحـــل :

1 — $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ إذن : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (AB)

منه : $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 - 3t \\ z = -3 + 3t \end{cases}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (AB) حيث $t \in IR$

2 — من أجل $(x ; y ; z) = (1 ; 3 ; 2)$ نحصل على :

$\begin{cases} 1 = 2 - t \\ 3 = 2 - 3t \\ 2 = -3 + 3t \end{cases}$ أي $\begin{cases} t = 1 \\ t = -1/3 \\ t = 5/3 \end{cases}$ تناقض إذن $C(1 ; 3 ; 2)$ لا تنتمي إلى المستقيم (AB)

تطبيق :

(d_1) ، (d_2) ، (d_3) مستقيمات من الفضاء ممثلة وسيطيا بالجمل التالية على الترتيب :

$\begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = -1 - t \\ z = 3 + 4t \end{cases}$ **حيث $t \in IR$ (تمثيل (d_1))**

$\begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 4 + 3\alpha \\ z = 5 - \alpha \end{cases}$ **حيث $\alpha \in IR$ (تمثيل (d_2))**

$\begin{cases} x = -7 + 7\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ **حيث $\lambda \in IR$ (تمثيل (d_3))**

المطلوب : أدرس الوضعية النسبية لـ (d_1) و (d_2) ثم (d_1) و (d_3)

الحل :

لدينا أشعة توجيه المستقيمات (d_1) ، (d_2) و (d_3) هي على الترتيب

$\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ ؛ $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ ؛ $\vec{w}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

الوضعية النسبية لـ (d_1) و (d_2)

لدينا : $\frac{3}{-1} \neq \frac{-1}{5}$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقلين خطيا .

منه : إما (d_1) و (d_2) يتقاطعان في نقطة وحيدة
أو (d_1) و (d_2) ينتميان إلى مستويين مختلفين

نحل الجملة :

$\begin{cases} -2 + 5t = 1 - \alpha \text{ .... } (1) \\ -1 - t = 4 + 3\alpha \text{ .... } (2) \\ 3 + 4t = 5 - \alpha \text{ .... } (3) \end{cases}$

(1) تكافئ $\alpha = 1 + 2 - 5t$

تكافئ $\alpha = 3 - 5t$

بالتعويض في (2) نحصل على : $-1 - t = 4 + 3(3 - 5t)$

أي : $-1 - t = 13 - 15t$

أي : $t = 1$ منه : $\alpha = 3 - 5 = -2$

هل المعادلة (3) محققة ؟ بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على :

$3 + 4(1) = 5 - (-2)$ أي $7 = 7$ منه المعادلة (3) محققة .

نتيجة : (d_1) و (d_2) يتقاطعان في نقطة وحيدة $A(x ; y ; z)$ حيث

$\begin{cases} x = 1 - (-2) = 3 \\ y = 4 + 3(-2) = -2 \\ z = 5 - (-2) = 7 \end{cases}$ أي $(d_1) \cap (d_2) = \{A(3 ; -2 ; 7)\}$

الوضعية النسبية لـ (d_1) و (d_3) :

لدينا : $\frac{5}{7} \neq \frac{-1}{-3}$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{w}$ مستقيلين خطيا .

منه : إما (d_1) و (d_3) يتقاطعان في نقطة وحيدة
أو (d_1) و (d_3) ينتميان إلى مستويين مختلفين

نحل الجملة :
$$\begin{cases} -2 + 5t = -7 + 7\lambda \ldots\ldots\ (1) \\ -1 - t = -3\lambda \ldots\ldots\ldots\ (2) \\ 3 + 4t = 2\lambda \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3) \end{cases}$$

(2) تكافئ $t = -1 + 3\lambda$

بالتعويض في (1) نجد : $-2 + 5(-1 + 3\lambda) = -7 + 7\lambda$

أي $-7 + 15\lambda = -7 + 7\lambda$

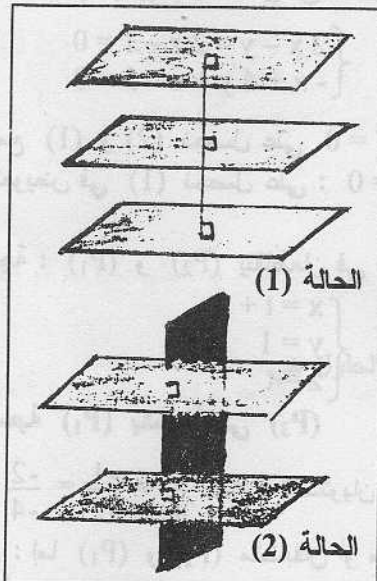
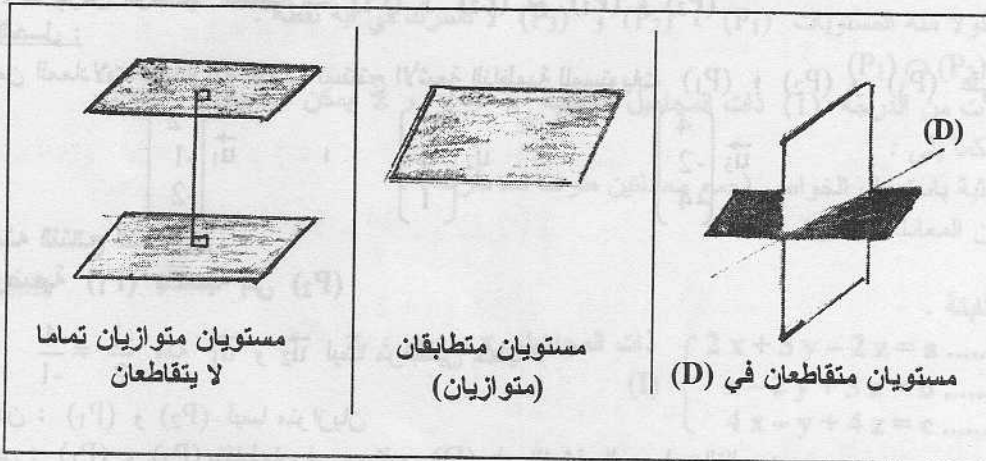
أي $\lambda = 0$ منه : $t = -1 + 3(0) = -1$

هل المعادلة (3) محققة ؟ بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على :
$3 + 4(-1) = 2(0)$ أي $-1 = 0$

منه المعادلة (3) ليست محققة .

نتيجة : الجملة (I) لا تقبل حلولا
منه : (d_1) و (d_3) ينتميان إلى مستويين مختلفين فهما إذن : لا يتقاطعان .

الأوضاع النسبية لمستويين

مستويان متوازيان تماما لا يتقاطعان | مستويان متطابقان (متوازيان) | مستويان متقاطعان في (D)

الحالة (1)

الحالة (2)

خلاصة : المستقيم في الفضاء معرف بجملة معادلتين ديكارتيتين لمستويين متقاطعين .

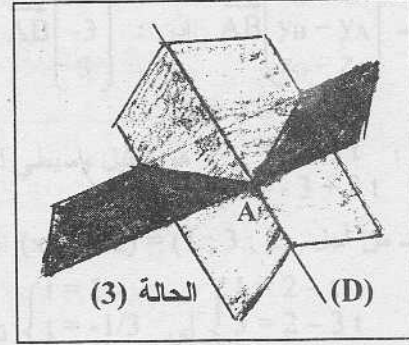
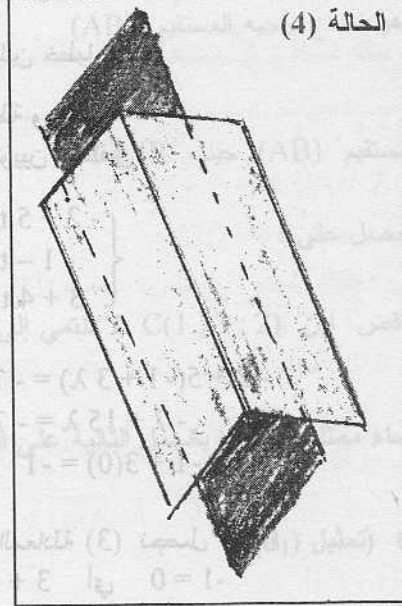
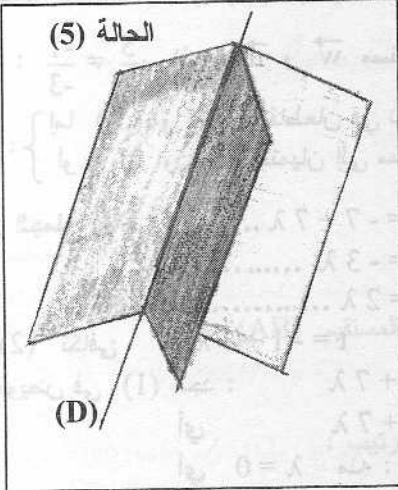
الأوضاع النسبية لثلاث مستويات من الفضاء

الحالة (1) كل المستويات متوازية مثنى مثنى .
إذن : التقاطع مجموعة خالية

الحالة (2) مستويان متوازيان و قاطع لهما
إذن : التقاطع مجموعة خالية

الحالة (3) مستويين متقاطعين و قاطع لهما .
المستويات الثلاثة تتقاطع في النقطة A من المستقيم (D)

الحالة (4) مستويان متقاطعان و مستوي يوازي قاطعهما .
التقاطع مجموعة خالية .

الحالة (5) المستويات تتقاطع في مستقيم .
المستويات تتقاطع في المستقيم (D)

تطبيق : في الفضاء المنسوب إلى معلم نعتبر المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3) التي معادلاتها الديكارتية على الترتيب :

$$2x - y - 2z - 1 = 0 \quad ; \quad -x + 4y + z - 3 = 0 \quad ; \quad 4x - 2y - 4z - 5 = 0$$

1 ــ أدرس الوضعية النسبية لـ (P_1) و (P_2) ثم (P_1) و (P_3)

الحــل :

من المعادلات الديكارتية الثلاث نستنتج الأشعة الناظمية للمستويات (P_1) ؛ (P_2) و (P_3) على الترتيب

$$\vec{u_1}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{u_2}\begin{pmatrix}-1\\4\\1\end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{u_3}\begin{pmatrix}4\\-2\\-4\end{pmatrix}$$

منه النتائج التالية :

وضعية (P_1) بالنسبة إلى (P_2)

$\frac{4}{-1} \neq \frac{-1}{2}$ منه $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ ليسا مرتبطين خطيا .

إذن : (P_1) و (P_2) ليسا متوازيان

أي : (P_1) و (P_2) يتقاطعان في مستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases}2x - y - 2z - 1 = 0\\-x + 4y + z - 3 = 0\end{cases} \quad \text{أي :} \quad \begin{cases}2x - y - 2z - 1 = 0 \;......... (1)\\-2x + 8y + 2z - 6 = 0 \;.....(2)\end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نحصل على $7y - 7 = 0$ أي $y = 1$

بالتعويض في (1) نحصل على : $2x - 1 - 2z - 1 = 0$ أي : $x - z - 1 = 0$

أي $x = z + 1$

نتيجة : (P_1) و (P_2) يتقاطعان في المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases}x = t + 1\\y = 1\\z = t\end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases}x = z + 1\\y = 1\\z \in IR\end{cases} \quad \text{حيث } t \in IR$$

وضعية (P_1) بالنسبة إلى (P_3)

$\frac{-2}{-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4}$ إذن : المستويان (P_1) و (P_3) متوازيان

إذن : إما (P_1) و (P_2) متطابقان أو منفصلان

بما أن المعادلتين $2x - y - 2z - 1 = 0$ و $4x - 2y - 4z - 5 = 0$ ليست متكافئتان

$\left(\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{-5}\right)$ فإن المستويان منفصلان

نتيجة : (P_1) و (P_3) متوازيان تماما لا يتقاطعان

نشاط :

في الفضاء المنسوب إلى معلم نعتبر المستويات (P_1) ، (P_2) و (P_3) التي معادلاتها الديكارتية على الترتيب :

$$4x + y + z + 10 = 0 \quad ; \quad 2x + y + 3 = 0 \quad \text{و} \quad 2x - y + 2z - 1 = 0$$

أدرس تقاطع المستويات (P_1) ، (P_2) ، (P_3)

الحـل :

إذا وجدت نقطة $A(x ; y ; z)$ من الفضاء مشتركة بين المستويات $(P1)$ ، (P_2) و (P_3) فإن احداثياتها تحقق الجملة

$$(I) \begin{cases} 4x + y + z + 10 = 0 \ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x + y + 3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\ 2x - y + 2z - 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (3) نحصل على : $6x + 3z + 9 = 0$

أي : $2x + z + 3 = 0$

أي : $z = -2x - 3 \ldots\ldots (4)$

نعوض (4) في (1) نحصل على : $4x + y - 2x - 3 + 10 = 0$

أي : $2x + y + 7 = 0 \ldots\ldots\ldots (5)$

من جهة أخرى لدينا المعادلة (2) : $2x + y + 3 = 0$

نتيجة : $\begin{cases} 2x + y + 7 = 0 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2x + y = -7 \\ 2x + y = -3 \end{cases}$

إذن : الجملة لا تقبل حلول .

خلاصة : الجملة (I) لا تقبل حلولا منه المستويات (P_1) ، (P_2) و (P_3) لا تشترك في أية نقطة .

أي $(P_1) \cap (P_2) \cap (P_3) = \varnothing$

ملاحظة : لحل جملة 3 معادلات من الدرجة (1) ذات المجاهيل الحقيقية x ، y ، z يمكن استعمال طريقة GAUSS كما يلي :

(1) نحول الجملة إلى جملة مثلثية باستعمال الخواص (جمع معادلتين طرف لـ طرف) .

(2) نصعد في الحلول ابتداء من المعادلة الأخيرة .

مثال :

a ، b ، c أعداد حقيقية ثابتة .

حل في R^3 الجملة ذات المجاهيل x ، y ، z

$$(I) \begin{cases} 2x + 3y - 2z = a \ldots\ldots\ldots (1) \\ x - 2y + 3z = b \ldots\ldots\ldots (2) \\ 4x - y + 4z = c \ldots\ldots\ldots (3) \end{cases}$$

الحـل :

نضرب طرفي المعادلة (1) في 2 : $4x + 6y - 4z = 2a \ldots\ldots\ldots (4)$

نضرب طرفي المعادلة (2) في 3 : $3x - 6y + 9z = 3b \ldots\ldots\ldots (5)$

نجمع (4) و (5) نحصل على : $7x + 5z = 2a + 3b \ldots\ldots\ldots (6)$

نضرب طرفي المعادلة (3) في -2 : $-8x + 2y - 8z = -2c \ldots\ldots (7)$

نجمع (7) و (2) نحصل على : $-7x - 5z = b - 2c \ldots\ldots\ldots (8)$

من (6) و (8) لدينا $\begin{cases} 7x + 5z = 2a + 3b \\ -7x - 5z = b - 2c \end{cases}$ إذن : $2a + 3b = 2c - b$

نتيجة : إذا كانت الأعداد الحقيقية a ، b ، c تحقق العلاقة :

$2a + 3b = 2c - b$ فإن الجملة $\begin{cases} 7x + 5z = 2a + 3b \\ -7x - 5z = b - 2c \end{cases}$ تقبل مالا نهاية من الحلول هي

$$\{z \in IR \,;\, x = \frac{2a + 3b - 5z}{7}\}$$

منه : حسب المعادلة (3) فإن : $y = 4x + 4z - c$

أي : $y = \frac{4}{7}(2a + 3b - 5z) + 4z - c$

أي : $y = \frac{8}{7}a + \frac{12}{7}b - c + \frac{8}{7}z$

إذا كانت الأعداد الحقيقية a ، b ، c لا تحقق المساواة :
$2a + 3b = 2c - b$ فإن الجملة (I) لا تقبل حلولا .

خلاصة :

إذا كان $2a + 3b \neq 2c - b$ فإن الجملة (I) **لا تقبل حلولا**

إذا كان $2a + 3b = 2c - b$ فإن الجملة (I) **تقبل مجموعة غير منتهية من الحلول** $(x ; y ; z)$ حيث :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7}a + \frac{3}{7}b - \frac{5}{7}t \\ y = \frac{8}{7}a + \frac{12}{7}b - c + \frac{8}{7}t \\ z = t \end{cases} \quad \text{حيث } t \in IR$$

تحقيق : إذا كان $2a + 3b = 2c - b$ فإن :

$$2x + 3y - 2z = \frac{4}{7}a + \frac{6}{7}b - \frac{10}{7}t + \frac{24}{7}a + \frac{36}{7}b - 3c + \frac{24}{7}t - 2t$$
$$= \frac{28}{7}a + \frac{42}{7}b + \frac{14}{7}t - 3c - 2t$$
$$= 4a + 6b + 2t - 3c - 2t$$
$$= 4a + 6b - 3c$$
$$= 2(2a + 3b) - 3c$$
$$= 2(2c - b) - 3c \quad \text{لأن } 2a + 3b = 2c - b$$
$$= c - 2b$$

لكن $2a + 3b = 2c - b$

منه : $2a = 2c - 4b$

أي : $a = c - 2b$

نتيجة (1) $2x + 3y - 2z = a$ أي المعادلة (1) محققة .

$$x - 2y + 3z = \frac{2}{7}a + \frac{3}{7}b - \frac{5}{7}t - \frac{16}{7}a - \frac{24}{7}b + 2c - \frac{16}{7}t + 3t$$
$$= -\frac{14}{7}a - \frac{21}{7}b - \frac{21}{7}t + 3t + 2c$$
$$= -2a - 3b - 3t + 3t + 2c$$
$$= -(2a + 3b) + 2c$$
$$= -(2c - b) + 2c \quad \text{لأن } 2a + 3b = 2c - b$$
$$= b$$

نتيجة (2) $x - 2y + 3z = b$ إذن : المعادلة (2) محققة .

$$4x - y + 4z = \frac{8}{7}a + \frac{12}{7}b - \frac{20}{7}t - \frac{8}{7}a - \frac{12}{7}b + c - \frac{8}{7}t + 4t$$
$$= \frac{-28}{7}t + 4t + c$$
$$= c$$

نتيجة (3) $4x - y + 4z = c$ إذن : المعادلة (3) محققة .

خلاصة : الجملة (1) (2) (3) محققة من أجل

$$\begin{cases} x = \frac{2}{7}a + \frac{3}{7}b - \frac{5}{7}t \\ y = \frac{8}{7}a + \frac{12}{7}b - c + \frac{8}{7}t \\ z = t \end{cases} \quad \text{حيث } t \in IR$$

تمارين الكتاب المدرسي

في كل التمارين الفضاء منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

التمرين ـ 1

1 ـ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الي يشمل A(0 ; 0 ; 1) و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له .

2 ـ أعط تمثيل وسيطي للمستقيم (D') الذي يشمل B(-1 ; 0 ; 1) و $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له .

الحـل ـ 1

لتكن M(x ; y ; z) نقطة من الفضاء إذن $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y\\z-1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+1\\y\\z-1\end{pmatrix}$

1 ـ $M \in (D)$ يكافئ $\overrightarrow{AM} // \vec{u}$

يكافئ $\begin{cases}x=t\\y=t\\z-1=t\end{cases}$ حيث $t \in IR$

يكافئ $\begin{cases}x=t\\y=t\\z=t+1\end{cases}$ حيث $t \in IR$

و هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

$M \in (D')$ يكافئ $\overrightarrow{BM} // \vec{v}$

يكافئ $\begin{cases}x+1=-t\\y=0\\z-1=2t\end{cases}$ حيث $t \in IR$

يكافئ $\begin{cases}x=-t-1\\y=0\\z=2t+1\end{cases}$ حيث $t \in IR$

و هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (D')

التمرين ـ 2

A ، B ، C ؛ D نقط احداثياتها على الترتيب (-2 ; 7 ; 1) ؛ (3 ; 5 ; 2) ؛ (13 ; 1 ; 4) ؛ (-12 ; 11 ; 1)

1 ـ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AB)

2 ـ هل النقط C و D تنتمي إلى المستقيم (AB)

الحـل ـ 2

1 ـ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3+2\\5-7\\2-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-2\\1\end{pmatrix}$

$M \in (AB)$ يكافئ $\overrightarrow{AM} // \overrightarrow{AB}$

يكافئ $\begin{cases}x+2=5t\\y-7=-2t\\z-1=t\end{cases}$ حيث $t \in IR$

يكافئ $\begin{cases}x=5t-2\\y=-2t+7\\z=t+1\end{cases}$ حيث $t \in IR$

و هو التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB)

2 ـ هل $C(13 ; 1 ; 4)$ تنتمي إلى (AB) ؟

من أجل $\begin{cases} x = 13 \\ y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$ فإن $\begin{cases} 13 = 5t - 2 \\ 1 = -2t + 7 \\ 4 = t + 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 5t = 15 \\ 2t = 6 \\ t = 3 \end{cases}$

أي $\begin{cases} t = 3 \\ t = 3 \\ t = 3 \end{cases}$

أي $t = 3$ إذن : $C \in (AB)$

هل $D(-12 ; 11 ; 1)$ تنتمي إلى (AB) ؟

من أجل $\begin{cases} x = -12 \\ y = 11 \\ z = 1 \end{cases}$ فإن $\begin{cases} -12 = 5t - 2 \\ 11 = -2t + 7 \\ 1 = t + 1 \end{cases}$

أي $\begin{cases} 5t = -10 \\ 2t = -4 \\ t = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \\ t = 0 \end{cases}$ تناقض إذن : $D \not\in (AB)$

<u>التمرين ـ 3</u>

ليكن (D) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ مع $t \in IR$

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (T) الذي يشمل النقطة $A(-1 ; 2 ; -4)$ و يوازي المستقيم (D)

<u>الحـل ـ 3</u>

$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -t \\ z = -3 - 2t \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x + 2 = 3t \\ y = -t \\ z + 3 = -2t \end{cases}$ منه $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (D)

نتيجة : المستقيم (T) يشمل $A(-1 ; 2 ; -4)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له

منه تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x + 1 = 3t \\ y - 2 = -t \\ z + 4 = -2t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

أي $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t + 2 \\ z = -2t - 4 \end{cases}$ مع $t \in IR$

<u>التمرين ـ 4</u>

ما هي طبيعة المجموعة التي تمثيلها الوسيطي $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$ مع $t \in IR$

<u>الحـل ـ 4</u>

$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} t = \frac{1}{3}x \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} t = \frac{1}{3} x \\ y = 2 + \frac{1}{3} x \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} 3y = 6 + x \\ z = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x - 3y + 6 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

إذن : هذه المجموعة هي المستقيم الذي معادلته الديكارتية $x - 3y + 6 = 0$ و الذي ينتمي إلى المستوي ذو المعادلة $z = 0$

التمرين – 5

هل جملة المعادلتين $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$ **و التمثيل الوسيطي** $\begin{cases} x = -1 - 9t \\ y = -2 - 4t \\ z = t \end{cases}$

حيث $(t \in IR)$ يعرفان نفس المستقيم ؟

الحـل – 5

لدينا الجملة $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \; .... (1) \\ 2x - 3y + 2z = 4 \; ...... (2) \end{cases}$

نضرب طرفي المعادلة (1) في -2 : $-2x + 4y + 2z = -6 \; .... (3)$

نجمع المعادلتين (2) و (3) : $y + 4z = -2$ أي : $y = -2 - 4z \; .... (4)$

نعوض (4) في (1) : $x - 2(-2 - 4z) - z = 3$

أي : $x + 4 + 8z - z = 3$

أي : $x = -1 - 7z \; .... (5)$

نتيجة : الجملة $\begin{cases} x - 2y - z = 3 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x = -1 - 7z \\ y = -2 - 4z \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = -1 - 7t \\ y = -2 - 4t \\ z = t \end{cases}$ مع $t \in IR$

نتيجة : الجملة و التمثيل الوسيطي لا يعرفان نفس المستقيم .

التمرين – 6

نفس السؤال التمرين 5 بالنسبة للجملة $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$

و التمثيل $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$ مع $t \in IR$

الحـل – 6

الجملة $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2x + 2y + 2z - 4 = 0 \\ -2x - y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} y + 5z - 9 = 0 \\ 2x + 2y + 2z - 4 = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} y = 9 - 5z \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} y = 9 - 5z \\ x = -y - z + 2 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} y = 9 - 5z \\ x = -9 + 5z - z + 2 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = -7 + 4z \\ y = 9 - 5z \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x = -3 - 4 + 4z \\ y = 4 + 5 - 5z \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -3 + 4(z-1) \\ y = 4 - 5(z-1) \end{cases}$$ تكافئ

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 5t \\ t = z - 1 \end{cases}$$ تكافئ

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 5t \\ z = 1 + t \end{cases}$$ تكافئ

نتيجة : الجملة و التمثيل الوسيطي يعرفان نفس المستقيم .

التمرين ــ 7

ليكن (P) المستوي ذو المعادلة الديكارتية $x - y + 2z = 2$ و $A(4\,;-2\,;1)$ نقطة من الفضاء .

1 ــ عين $\vec{u}$ شعاع ناظمي لــ (P)

2 ــ أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له .

3 ــ استنتج احداثيات النقطة H حيث H هي المسقط العمودي لــ A على (P)

الحــل ــ 7

1 ــ $x - y + 2z = 2$ هي معادلة (P) إذن : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي لــ (P)

2 ــ (D) يشمل $A(4\,;-2\,;1)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له إذن : (D) له التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x - 4 = t \\ y + 2 = -t \\ z - 1 = 2t \end{cases}$$ أي $$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$ مع $t \in IR$

3 ــ الشعاع الناظمي للمستوي (P) هو نفسه شعاع توجيه المستقيم (D) إذن : المستقيم (D) عمودي على المستوي (P)

بما أن A تنتمي إلى المستقيم (D) فإن مسقطها العمودي على المستوي (P) هي نقطة تقاطع (D) و (P) إذن :

احداثيات النقطة H هي حلول الجملة $$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$ مع $t \in IR$

أي $$\begin{cases} 4 + t - (-2 - t) + 2(1 + 2t) = 2 \\ x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

أي $$\begin{cases} 8 + 6t = 2 \\ x = 4 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

منه $$\begin{cases} t = -1 \\ x = 4 - 1 = 3 \\ y = -2 + 1 = -1 \\ z = 1 - 2 = -1 \end{cases}$$

نتيجة : النقطة H لها الاحداثيات $H(3\,;-1\,;-1)$

تحقيق : $AH = \sqrt{(4-3)^2 + (-2+1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

مسافة النقطة A عن المستوي (P) هي : $\ell = \dfrac{|4+2+2-2|}{\sqrt{1+1+4}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

إذن : $AH = \ell = \sqrt{6}$

التمرين ــ 8

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (D) الذي يشمل $A(-3\,;5\,;-1)$ و العمودي على المستوي (P) ذو المعادلة الديكارتية $x - 2y + 3z = 0$

الحــل — 8

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

(D) عمودي على (P) إذن $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (D)

منه التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) : $\begin{cases}x+3=t\\y-5=-2t\\z+1=3t\end{cases}$

أي $\begin{cases}x=t-3\\y=-2t+5\\z=3t-1\end{cases}$ مع $t\in IR$

التمرين — 9

(D) مستقيم تمثيله الوسيطي $\begin{cases}x=-4-t\\y=2-t\\z=1+2t\end{cases}$

عين تقاطع (D) مع المستويات $(o;\vec{i};\vec{j})$ ؛ $(o;\vec{j};\vec{k})$ ؛ $(o;\vec{i};\vec{k})$

الحــل — 9

إذا وجدت نقطة $A(x;y;z)$ مشتركة بين (D) و المستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ فإن :

$\begin{cases}x=-4-t\\y=2-t\\z=1+2t\\z=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}x=-4-t\\y=2-t\\0=1+2t\\z=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}x=-4-t\\y=2-t\\t=-1/2\\z=0\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}x=-4+\frac{1}{2}=-\frac{7}{2}\\y=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\\z=0\end{cases}$

نتيجة : (D) يقطع المستوي $(o;\vec{i};\vec{j})$ في النقطة $A(-7/2;5/2;0)$

لتكن $M(x;y;z)$ نقطة مشتركة بين (D) و المستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$

$M\in(o;\vec{j};\vec{k})$ إذن : $x=0$

منه : $-4-t=0$

أي : $t=-4$

منه : $\begin{cases}y=2-t=2+4=6\\z=1+2t=1-8=-7\end{cases}$

نتيجة : (D) يقطع المستوي $(o;\vec{j};\vec{k})$ في النقطة $M(0;6;-7)$

لتكن $B(x;y;z)$ نقطة مشتركة بين (D) و المستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$

$B\in(o;\vec{i};\vec{k})$ إذن : $y=0$

أي $2-t=0$

منه $t=2$

إذن : $\begin{cases}x=-4-t=-4-2=-6\\z=1+2t=1+4=5\end{cases}$

نتيجة : (D) يقطع المستوي $(o;\vec{i};\vec{k})$ في النقطة $B(-6;0;5)$

التمرين ـــ 10

ما هي طبيعة مجموعة النقط من الفضاء التي تحقق :

$$\begin{cases} x = 1 + t^2 \\ y = 2 - 3\,t^2 \\ z = 2 + 2\,t^2 \end{cases} \quad \text{مع} \quad t \in IR$$

الحـل ـــ 10

نضع $t^2 = \alpha$ حيث $\alpha \geq 0$

منه مجموعة النقط تحقق الجملة : $\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - 3\,\alpha \\ z = 2 + 2\,\alpha \end{cases}$ حيث $\alpha \in R^+$

إذن : المجموعة هي جزء من المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3\,t \\ z = 2 + 2\,t \end{cases}$ مع $t \in IR$

التمرين ـــ 11

(d) و (d') **مستقيمين تمثيلهما الوسيطيين هما على الترتيب :**

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = t' + 1 \\ y = 1 - t' \\ z = 2 + t' \end{cases} \quad \text{مع } t \in IR \text{ و } t' \in IR$$

بين أن (d) و (d') من نفس المستوي ثم عين تقاطعهما .

الحـل ـــ 11

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (d_1)

$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (d_2)

بما أن $\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1}$ فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ **مستقيلين خطيا .**

إذن : (d_1) و (d_2) ليسا متوازيين .

لنحل الجملة $\begin{cases} t = t' + 1 \\ t = 1 - t' \end{cases}$

بالجمع : $2\,t = 2$ منه $t = 1$

بالتعويض في احدى المعادلات : $t' = t - 1$ منه $t' = 1 - 1 = 0$

نتيجة : من أجل $t = 1$ فإن $t' = 0$ فالمستويين إما يتقاطعان في نقطة وحيدة احداثياتها $A(x\,;\,y\,;\,z)$ أو ليسا من نفس المستوي كما يلي :

$$\begin{cases} x = t = 1 \\ y = t = 1 \\ z = t + 1 = 1 + 1 = 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = t' + 1 = 1 \\ y = 1 - t' = 1 \\ z = 2 + t' = 2 \end{cases}$$

نتيجة : (d_1) و (d_2) من نفس المستوي و يتقاطعان في نقطة وحيدة $A(1\,;\,1\,;\,2)$

التمرين ـــ 12

هل المستقيمان $\begin{cases} x = 3 + 2\,t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}$ **و** $\begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 1 + 2\,t' \\ z = 3 - t' \end{cases}$ **متوازيان ؟ متقاطعان ؟ ليسا من نفس المستوي**

الحـل ـــ 12

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم الأول .

$\vec{v}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم الثاني .

$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{2}$ إذن : المستقيمان ليسا متوازيان .

نتيجة (1) إما المستقيمان متقاطعان في نقطة وحيدة أو لا ينتميان إلى نفس المستوي .

لنحل الجملة $\begin{cases}3+2t=3+t'\\3+t=1+2t'\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}2t=t'\\3+t=1+2(2t)\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}2t=t'\\3-1=4t-t\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}t'=2t\\t=2/3\end{cases}$

تكافئ $\begin{cases}t'=4/3\\t=2/3\end{cases}$

من أجل $t=2/3$ نحصل على : $\begin{cases}x=3+2\left(\frac{2}{3}\right)=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}\\y=3+\frac{2}{3}=\frac{11}{3}\\z=\frac{2}{3}\end{cases}$

من أجل $t'=4/3$ نحصل على : $\begin{cases}x=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}\\y=1+2\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{11}{3}\\z=3-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}\end{cases}$

نتيجة : المستقيمان لا يتقاطعان في أي نقطة .

إذن : فهما من مستويين مختلفين .

التمرين – 13

أكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) الذي يشمل النقطة $A(0\,;-1\,;2)$

و يوازي المستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases}x=1-2k\\y=2k\\z=5\end{cases}$ **حيث $k\in IR$**

الحل – 13

$\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (D) إذن : $\vec{u}$ هو أيضا شعاع توجيه للمستقيم (d) .

إذن : (d) له التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases}x-0=-2t\\y+1=2t\\z-2=0\end{cases}$ أي $\begin{cases}x=-2t\\y=2t-1\\z=2\end{cases}$ حيث $t\in IR$

التمرين – 14

ليكن (D) و (D') مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$\begin{cases}x=1-t\\y=2+3t\\z=t\end{cases}$ و $\begin{cases}x=2k\\y=5-6k\\z=1-2k\end{cases}$ **حيث $t\in IR$ و $k\in IR$**

أثبت أن (D) و (D') متطابقان .

الحل – 14

$\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-6\\-2\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه (D')

لدينا : $\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = \frac{-2}{1} = -2$

إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان

أي : المستقيمان (D) و (D') متوازيان .

منه : إذا وجدت نقطة مشتركة بين (D) و (D') فإن (D) و (D') متطابقان

لنحل الجملة : $\begin{cases} 2k = 1 - t \\ 5 - 6k = 2 + 3t \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 2k + t - 1 = 0 \\ 6k + 3t - 3 = 0 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 6k + 3t - 3 = 0 \\ 6k + 3t - 3 = 0 \end{cases}$

تكافئ $6k + 3t - 3 = 0$

تكافئ $3t = 3 - 6k$

تكافئ $t = 1 - 2k$

منه : المعادلة $t = 1 - 2k$ محققة .

أي الجملتين $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 2k \\ y = 5 - 6k \\ z = 1 - 2k \end{cases}$ متكافئتان إذن : المستقيمان (D) و (D') متطابقان .

ملاحظة : يكفي إعطاء قيمة لـــ t ثم استنتاج وجود نقطة مشتركة بين (D) و (D') كما يلي :

من أجل $t = 1$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$

من أجل $k = 0$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$ إذن : النقطة $M(0 ; 5 ; 1)$ مشتركة بين (D) و (D') و بما أنهما متوازيان فهما متطابقان .

التمرين – 15

(D) و (D') مستقيمان تمثيلهما الوسيطين هما على الترتيب :

$\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ و $\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 + 2k \\ z = 1 + k \end{cases}$ حيث $k \in IR$ و $t \in IR$

أثبت أن (D) و (D') من نفس المستوي .

الحل – 15

$\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ هوشعاع توجيه المستقيم (D')

$\frac{-1}{1} \neq \frac{2}{2}$: إذن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا مرتبطين خطيا (غير متوازيان)

منه : المستقيمان (D) و (D') ليسا متوازيان .

نتيجة : إما (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة
أو (D) و (D') ليسا من نفس المستوي

إذن : يكفي أن نثبت أن (D) و (D') يتقاطعان كما يلي :

الجملة $\begin{cases} -4 + t = 1 - k \\ 4 + 2t = 2 + 2k \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} t = 5 - k \\ 2t = -2 + 2k \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 2t = 10 - 2k \\ 2t = -2 + 2k \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} 2t = 10 - 2k \\ 4t = 8 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} t = 5 - k \\ t = 2 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} k = 5 - t \\ t = 2 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} k = 3 \\ t = 2 \end{cases}$

من أجل $t = 2$ نحصل على : $\begin{cases} x = -4 + 2 = -2 \\ y = 4 + 4 = 8 \\ z = 2 + 2 = 4 \end{cases}$

من أجل $k = 3$ نحصل على : $\begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = 2 + 6 = 8 \\ z = 1 + 3 = 4 \end{cases}$

نتيجة : (D) و (D') يتقاطعان في نقطة وحيدة $A(-2 ; 8 ; 4)$

إذن : (D) و (D') ينتميان إلى نفس المستوي .

التمرين ــ 16

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x = 3 + 2m \\ y = m \\ z = -1 - 4m \end{cases}$$ **حيث** $t \in IR$ **و** $m \in IR$

1 ــ بين أن (D) و (T) ليسا من نفس المستوي

2 ــ عين تمثيلا وسيطيا لمستقيم (P) يوازي (T) و يقطع (D)

الحل ــ 16

1 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (T)

$\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1}$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متوزيان .

منه : (D) و (T) ليسا متوازيان .

أي إما (D) و (T) متقاطعان أو ليسا من نفس المستوي .

$\begin{cases} 1 + t = 3 + 2m \\ 1 - 2t = m \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 1 + t = 3 + 2(1 - 2t) \\ m = 1 - 2t \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} t + 4t = 3 + 2 - 1 \\ m = 1 - 2t \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} t = 4/5 \\ m = 1 - \frac{8}{5} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} t = 4/5 \\ m = -3/5 \end{cases}$

من أجل $t = 4/5$ نحصل على : $\begin{cases} x = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5} \\ y = 1 - \frac{8}{5} = \frac{-3}{5} \\ z = 1 + \frac{12}{5} = \frac{17}{5} \end{cases}$

من أجل $m=-3/5$ نحصل على : $\begin{cases} x = 3 - \frac{6}{5} = \frac{9}{5} \\ y = \frac{-3}{5} \\ z = -1 + \frac{12}{5} = \frac{7}{5} \end{cases}$

نتيجة : المستقيمان (D) و (T) لا يتقاطعان في أية نقطة . إذن : (D) و (T) ليسا من نفس المستوي .

2 ـ (P) يوازي (T) إذن الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستقيم (P)

منه تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = \alpha + 2k \\ y = \beta + k \\ z = \lambda - 4k \end{cases}$ حيث $k \in IR$ و α ، β ، λ أعداد حقيقية ثابتة نعينها كما يلي :

(P) يقطع (D) إذن يكفي أن نعين α ، β ، λ حتى يكون المستقيمان (P) و (D) يشتركان في نقطة .

من أجل $t=0$ نحصل على : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

نضع $k=0$ إذن : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = \lambda \end{cases}$ منه $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$

نتيجة : يكفي أخذ المستقيم (P) ذو التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 1 + k \\ z = 1 - 4k \end{cases}$

التمرين ـ 17

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases}$ **و** $\begin{cases} x = 9 + 5k \\ y = -5 - k \\ z = -8 - 4k \end{cases}$ **حيث** $t \in IR$ **و** $k \in IR$

بين أن (T) و (D) مستقيمان منطبقان .

الحل ـ 17

نضع $t = 2 + k$ إذن : $k = t - 2$

منه : $\begin{cases} x = 9 + 5k \\ y = -5 - k \\ z = -8 - 4k \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x = 9 + 5(t-2) \\ y = -5 - (t-2) \\ z = -8 - 4(t-2) \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 9 + 5t - 10 \\ y = -5 - t + 2 \\ z = -8 - 4t + 8 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = -3 - t \\ z = -4t \end{cases}$

نتيجة : التمثيلين الوسيطيين للمستقيمين (D) و (T) متكافئين

إذن : المستقيمان (D) و (T) منطبقان

ملاحظة : فكرة وضع $t = 2 + k$ جاءت من المساواة $-8 - 4k = -4t$

أي $-4(2+k) = -4t$ أي $2 + k = t$

إذا لم تلاحظ ذلك يمكن ان نثبت أن (D) و (T) ليسا متوازيان و ليسا متقاطعان (الطريقة الكلاسيكية) .

التمرين ــ 18

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$$\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -2k \\ y = 1 + 4k \\ z = k \end{cases}$$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

بين أن (D) و (T) متوازيان .

الحـل ــ 18

$\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (D)

$\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (T)

$\frac{-2}{-2} = \frac{4}{4} = \frac{1}{1} = 1$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان .

منه المستقيمان (D) و (T) متوازيان .

التمرين ــ 19

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$$\begin{cases} x = -3 + t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 2 - 2k \\ z = 5 + 3k \end{cases}$$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

بين أن (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي .

الحـل ــ 19

1 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه (T)

$\frac{-2}{1} \neq \frac{1}{1}$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متوزيان .

منه : (D) و (T) ليسا متوازيان .

إذن يكفي أن نثبت أن (D) و (T) لا يتقاطعان في أية نقطة .

$$\begin{cases} -3 + t = -1 + k \\ t = 2 - 2k \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} -3 + 2 - 2k = -1 + k \\ t = 2 - 2k \end{cases}$$

$$\text{يكافئ} \quad \begin{cases} -1 + 1 = 3k \\ t = 2 - k \end{cases}$$

$$\text{يكافئ} \quad \begin{cases} k = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

من أجل $k = 0$ نحصل على : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$

من أجل $t = 2$ نحصل على : $\begin{cases} x = -3 + 2 = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 + 3(2) = 7 \end{cases}$

نتيجة : (D) و (T) لا يتقاطعان منه (D) و (T) لا ينتميان إلى نفس المستوي .

التمرين ــ 20

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = k \\ y = 1 - k \\ z = -1 + 4k \end{cases}$$ حيث $t \in IR$ و $k \in IR$

بين أن (D) و (T) متقاطعان .

الحل ــ 20

$\begin{cases} -3+2t=k \\ 2-t=1-k \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} k=-3+2t \\ 2-t=1-(-3+2t) \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} k=-3+2t \\ 2-t=1+3-2t \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} k=-3+2t \\ t=2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} k=-3+2(2) \\ t=2 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} k=1 \\ t=2 \end{cases}$

من أجل $k=1$ نحصل على : $\begin{cases} x=1 \\ y=1-1=0 \\ z=-1+4=3 \end{cases}$

من أجل $t=2$ نحصل على : $\begin{cases} x=-3+2(2)=1 \\ y=2-2=0 \\ z=1+2=3 \end{cases}$

نتيجة : (D) و (T) يتقاطعان في النقطة $A(1\,;0\,;3)$

التمرين ــ 21

في كل حالة من الحالات التالية عين تقاطع المستويين (P) و (Q) المعرفين بمعادلاتهما الديكارتيتين :

1 ــ $(P):\ x+y+z=4$ و $(Q):\ 3x+3y+3z-12=0$

2 ــ $(P):\ x+y+z=4$ و $(Q):\ 3x+3y+3z+12=0$

3 ــ $(P):\ 2x-y+z+2=0$ و $(Q):\ x+y+z=0$

4 ــ $(P):\ -3x+2y+z-1=0$ و $(Q):\ x-y+2z=5$

الحل ــ 21

1 ــ $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+3y+3z-12=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 3x+3y+3z=12 \\ 3x+3y+3z=12 \end{cases}$

يكافئ $3x+3y+3z=12$

يكافئ $x+y+z-4=0$

نتيجة : المستويان (P) و (Q) متطابقان إذن : تقاطعهما هو المستوي نفسه ذو المعادلة $x+y+z-4=0$

2 ــ $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x+3y+3z+12=0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} 3x+3y+3z=12 \\ 3x+3y+3z=-12 \end{cases}$ مستحيل

نتيجة : الجملة لا تقبل حلولا منه المستويان (P) و (Q) لا يتقاطعان .

3 ــ $\begin{cases} 2x-y+z+2=0 \ \ldots\ldots\ldots\ (1) \\ x+y+z=0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نحصل على : $3x+2z+2=0$

منه : $x=\frac{-2}{3}z-\frac{2}{3}$ .... (3)

بتعويض (3) في (2) نحصل على : $-\frac{2}{3}z-\frac{2}{3}+y+z=0$

منه : $y+\frac{1}{3}z-\frac{2}{3}=0$

أي : $y=\frac{-1}{3}z+\frac{2}{3}$ ...... (4)

نتيجة : الجملة $\begin{cases} 2x-y+z+2=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=\frac{-2}{3}z-\frac{2}{3} \\ y=\frac{-1}{3}z+\frac{2}{3} \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x=\frac{-2}{3}t-\frac{2}{3} \\ y=\frac{-1}{3}t+\frac{2}{3} \\ z=t \end{cases}$ $t \in R$

منه : المستويان (P) و (Q) يتقاطعان في المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=\frac{-2}{3}t-\frac{2}{3} \\ y=\frac{-1}{3}t+\frac{2}{3} \\ z=t \end{cases}$

4 — $\begin{cases} -3x+2y+z-1=0 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} -3x+2y+z-1=0 \\ x-y+2z-5=0 \end{cases}$

لنبحث عن x و y بدلالة z (حل الجملة ذات المجهولين x و y)

$$\det=\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=3-2=1$$

$$\begin{cases} x=\begin{vmatrix} 2 & z-1 \\ -1 & 2z-5 \end{vmatrix}=4z-10+z-1=5z-11 \\ y=\begin{vmatrix} z-1 & -3 \\ 2z-5 & 1 \end{vmatrix}=z-1+6z-15=7z-16 \end{cases}$$

نتيجة : الجملة $\begin{cases} -3x+2y+z-1=0 \\ x-y+2z=5 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} x=5z-11 \\ y=7z-16 \end{cases}$

تكافئ $\begin{cases} x=5t-11 \\ y=7t-16 \\ z=t \end{cases}$

منه : المستويان (P) و (Q) يتقاطعان في المستوي ذو التمثيل الوسيطي $\begin{cases} x=5t-11 \\ y=7t-16 \\ z=t \end{cases}$ $t \in R$

التمرين — 22

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$\begin{cases} x=-1 \\ y=1-t \\ z=1-2t \end{cases}$ **و** $\begin{cases} x=4-5k \\ y=3-2k \\ z=-1+2k \end{cases}$ **حيث** $t \in IR$ **و** $k \in IR$

1 — تحقق أن المستقيمان (D) و (T) متقاطعان .

2 — أكتب المعادلة الديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D) و (T)

الحل — 22

1 — إذا كانت $A(x\,;y\,;z)$ نقطة مشتركة بين (D) و (T) فإن $x=-1$

منه : $4-5k=-1$ أي $k=1$

إذن : $\begin{cases} x=-1 \\ y=3-2(1)=1 \\ z=-1+2(1)=1 \end{cases}$

من جهة أخرى : من أجل $t=0$: $\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$

نتيجة : (D) و (T) يتقاطعان في النقطة $A(-1\,;1\,;1)$

2 ـ من أجل $t = 1$ فإن $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

منه $B(-1 ; 0 ; -1)$ تنتمي إلى (D)

من أجل $k = 0$ فإن $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$

منه $C(4 ; 3 ; -1)$ تنتمي إلى (T)

نتيجة : المستوي الذي يشمل المستقيمين (D) و (T) هو المستوي (P) الذي يشمل النقط A ، B ، C

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1+1 \\ 0-1 \\ -1-1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4+1 \\ 3-1 \\ -1-1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P) إذن : $\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$

$\begin{cases} a(0) + b(-1) + c(-2) = 0 \\ a(5) + b(2) + c(-2) = 0 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} -b - 2c = 0 \\ 5a + 2b - 2c = 0 \end{cases}$

من أجل $b = -2$ نحصل على $\begin{cases} 2 - 2c = 0 \\ 5a + 2b - 2c = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} c = 1 \\ 5a + 2b - 2c = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} c = 1 \ ; \ b = -2 \\ 5a + 2(-2) - 2(1) = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} c = 1 \ ; \ b = -2 \\ a = 6/5 \end{cases}$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix} 6/5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

إذن : $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$ هو أيضا شعاع ناظمي لـــ (P)

منه : معادلة (P) تكتب من الشكل : $6x - 10y + 5z + \alpha = 0$ حيث $\alpha \in IR$

بما أن $A \in (P)$ فإن : $6(-1) - 10(1) + 5(1) + \alpha = 0$

أي : $\alpha = 11$

نتيجة : معادلة المستوي (P) هي : $6x - 10y + 5z + 11 = 0$

التمرين ـــ 23

(D) و (T) مستقيمان تمثيلاهما الوسيطيين على الترتيب :

$$\begin{cases} x = -2 - 4t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 3 - 2k \\ z = -1 + 2k \end{cases}$$

1 ـ تحقق أن المستقيمان (D) و (T) متوازيان .

2 ـ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D) و (T)

الحل – 23

1 – $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (D)

$\vec{v}\begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}$ شعاع توجيه (T)

$\frac{-4}{4} = \frac{2}{-2} = \frac{-2}{2} = -1$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوزيان .

منه : (D) و (T) متوازيان .

2 – من أجل $t = 0$: $\begin{cases}x = -2\\y = 3\\z = 1\end{cases}$ منه $A(-2 ; 3 ; 1)$ نقطة من (D)

من أجل $t = 1$: $\begin{cases}x = -2 - 4 = -6\\y = 3 + 2 = 5\\z = 1 - 2 = -1\end{cases}$ منه $B(-6 ; 5 ; -1)$ نقطة من (D)

من أجل $k = 0$: $\begin{cases}x = 1\\y = 3\\z = -1\end{cases}$ منه $C(1 ; 3 ; -1)$ نقطة من (T)

نتيجة : المستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (D) و (T) هو المستوي الذي يشمل النقط A ، B ، C كما يلي :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6+2\\5-3\\-1-1\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\2\\-2\end{pmatrix}$ هو نفسه شعاع توجيه المستقيم (D)

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1+2\\3-3\\-1-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

إذن : $\begin{cases}\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}\\\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}-4a + 2b - 2c = 0\\3a - 2c = 0\end{cases}$

من أجل $a = 2$ نحصل على : $\begin{cases}-8 + 2b - 2c = 0\\6 - 2c = 0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}-4 + b - c = 0\\c = 3\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}b = c + 4\\c = 3\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}b = 7\\c = 3\end{cases}$

نتيجة : $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P)

منه (P) له المعادلة : $2x + 7y + 3z + \alpha = 0$ حيث $\alpha \in IR$

بما أن $A \in (P)$ فإن : $2(-2) + 7(3) + 3(1) + \alpha = 0$

أي : $\alpha = -20$

خلاصة : (p) له المعادلة $2x + 7y + 3z - 20 = 0$

تحقيق :

منه $\begin{cases} x=-2-4t \\ y=3+2t \\ z=1-2t \end{cases}$

$$2x+7y+3z-20=2(-2-4t)+7(3+2t)+3(1-2t)-20$$
$$=-4-8t+21+14t+3-6t-20$$
$$=0$$

منه $\begin{cases} x=1+4k \\ y=3-2k \\ z=-1+2k \end{cases}$

$$2x+7y+3z-20=2(1+4k)+7(3-2k)+3(-1+2k)-20$$
$$=2+8k+21-14k-3+6k-20$$
$$=0$$

التمرين ــ 24

في كل حالة من الحالات التالية عين تقاطع المستوي (P) و المستقيم (D)

1 ــ $(P): -2x+y-z+3=0$ و $(D): \begin{cases} x=t \\ y=-1+3t \\ z=2+t \end{cases}$

2 ــ $(P): x+3y-z+1=0$ و $(D): \begin{cases} x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=2 \end{cases}$

3 ــ $(P): x+y-2z+2=0$ و $(D): \begin{cases} x=5+t \\ y=1+t \\ z=4+t \end{cases}$

الحـل ــ 24

في كل مرة نعوض x ، y ، z في معادلة المستوي (P) لنحصل على قيمة الوسيط t ثم نبحث عن احداثيات نقطة التقاطع إذا وجدت . أما إذا كانت المعادلة محققة من أجل كل عدد حقيقي t فإن المستقيم (D) محتوى في المستوي (P) و عليه فإن $(D)\cap(P)=(D)$

1 ــ $\begin{cases} -2x+y-z+3=0 \\ x=t \\ y=-1+3t \\ z=2+t \end{cases}$ منه $-2(t)+(-1+3t)-(2+t)+3=0$

أي : $-2t-1+3t-2-t+3=0$

أي $0=0$ دائما محققة

نتيجة : (D) ينتمي إلى المستوي (p) منه $(D)\cap(P)=(D)$

2 ــ $\begin{cases} x+3y-z+1=0 \\ x=1+3t \\ y=-2-2t \\ z=2 \end{cases}$ منه $1+3t+3(-2-2t)-2+1=0$

أي $1+3t-6-6t-1=0$

أي $-3t=6$

أي $t=-2$

بالتعويض في معادلات (D) : $\begin{cases} x=1+3(-2)=-5 \\ y=-2-2(-2)=2 \\ z=2 \end{cases}$

نتيجة : $(D)\cap(P)=\{A(-5;2;2)\}$

3 ــ $\begin{cases} x+y-2z+2=0 \\ x=5+t \\ y=1+t \\ z=4+t \end{cases}$ منه $5+t+1+t-2(4+t)+2=0$

أي : $6+2t-8-2t+8=0$

أي : $6=0$ مستحيل

نتيجة : $(D)\cap(P)=\varnothing$

التمرين ــ 25

لتكن النقط $A(3;3;0)$ ؛ $w(1;1;1)$

1 ــ أكتب معادلة لسطح الكرة (S) التي مركزها w و تشمل النقطة A .

2 ــ أكتب معادلة لـ (P) المستوي المماس لـ (S) في النقطة A

3 ــ لتكن النقط $B(-1 ; 2 ; -1)$ ؛ $C(0 ; 0 ; -3)$ ؛ $D(1 ; 2 ; -3)$

a) تحقق أن النقط B ، C ، D ليست على استقامة واحدة .

b) أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (BCD) .

4 ــ بين أن (BCD) و (P) متعامدان .

5 ــ أكتب تمثيلا وسيطيا لتقاطع (P) و (BCD)

الحـل ــ 25

1 ــ نصف قطر الكرة هو : $WA = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9} = 3$

منه معادلة (S) : $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$

أي : $x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 = 9$

أي : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 6 = 0$

2 ــ المستوي (P) مماس لــ (S) عند A إذن : (P) يشمل A و $\overrightarrow{WA}$ شعاع ناظمي لــ (P)

لدينا $\overrightarrow{WA}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ ،

منه : (P) له المعادلة $2x + 2y - z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .

بما أن $A \in (P)$ فإن : $2(3) + 2(3) - 0 + \alpha = 0$

أي : $\alpha = -12$

نتيجة : معادلة (P) هي : $2x + 2y - z - 12 = 0$

3 ــ a) $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0+1\\0-2\\-3+1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}1+1\\2-2\\-3+1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$

بما أن $\frac{0}{-2} \neq \frac{2}{1}$ فإن $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BD}$ ليسا متوازيان

منه النقط B ، C ، D ليست على استقامة واحدة .

b) ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (BCD)

$\begin{cases}\vec{u} \perp \overrightarrow{BC}\\ \vec{u} \perp \overrightarrow{BD}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}a - 2b - 2c = 0\\ 2a - 2c = 0\end{cases}$

من أجل $a = 1$ نحصل على : $\begin{cases}1 - 2b - 2c = 0\\ 2 = 2c\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}1 - 2c = 2b\\ c = 1\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}-1 = 2b\\ c = 1\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}b = -1/2\\ c = 1\end{cases}$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1/2\\1\end{pmatrix}$ منه $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (BCD)

إذن : معادلة (BCD) هي : $2x - y + 2z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .

$B \in (BCD)$ إذن : $2(-1) - 2 + 2(-1) + \alpha = 0$

أي : $\alpha = 6$

نتيجة : معادلة المستوي (BCD) هي : $2x - y + 2z + 6 = 0$

4 ــ $\overrightarrow{WA}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (BCD) .

$$\overrightarrow{WA}\cdot\vec{u} = 2(2) + 2(-1) - 1(2) = 4 - 4 = 0$$

إذن : $\overrightarrow{WA} \perp \vec{u}$

منه : المستويان (BCD) و (P) متعامدان .

5 – $\begin{cases} 2x + 2y - z - 12 = 0 \\ 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$ نبحث عن x و y بدلالة z كما يلي :

$$\det = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -6$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -z-12 \\ -1 & 2z+6 \end{vmatrix}}{-6} = \dfrac{4z + 12 - z - 12}{-6} = \dfrac{3z}{-6} = \dfrac{-1}{2} z \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} -z-12 & 2 \\ 2z+6 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = \dfrac{-2z - 24 - 4z - 12}{-6} = z + 6 \end{cases}$$

نتيجة : تقاطع المستويين (BCD) و (P) هو المستقيم ذو التمثيل الوسيطي :

$$\begin{cases} x = \dfrac{-1}{2} t \\ y = t + 6 \\ z = t \end{cases}$$ حيث $t \in IR$

<u>التمرين – 26</u>

عين في كل حالة من الحالات التالية تقاطع المستويات (P) ، (Q) ، (R) المعرفة بمعادلاتها الديكارتية :

1 – $(P): x + y + z = 4$ ؛ $(Q): y + \frac{1}{2} z = 3$ ؛ $(R): 3x + 2y = 6$

2 – $(P): x + y + z = 4$ ؛ $(Q): -x + y - z = 2$ ؛ $(R): 3x + 4y + 3z = 15$

<u>الحـل – 26</u>

1 – $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y + \frac{1}{2} z = 3 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x + y + z = 4 \;......\; (1) \\ -2y - z = -6 \;.....\; (2) \\ 3x + 2y = 6 \;......\; (3) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) نحصل على $x - y = -2$ ...... (4)

نحل جملة المعادلتين (3) و (4) كما يلي :

$\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$ تكافئ $\begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$

بالجمع نحصل على $5x = 2$ منه $x = 2/5$

نعوض في المعادلة (4) : $\frac{2}{5} - y = -2$

منه : $y = \frac{2}{5} + 2$ أي $y = 12/5$

نعوض x و y في المعادلة (1) : $\frac{2}{5} + \frac{12}{5} + z = 4$

منه : $z = 4 - \frac{14}{5}$ أي $z = 6/5$

نتيجة : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في نقطة وحيدة $A(2/5 \,;\, 12/5 \,;\, 6/5)$

2 –
$$\begin{cases} x+y+z=4 \text{ ....} (1) \\ -x+y-z=2 \text{ ....} (2) \\ 3x+4y+3z=15 \text{ ......} (3) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نحصل على : $2y=6$ منه $y=3$

نعوض y في المعادلة (1) نحصل على : $x+3+z=4$ منه $z=1-x$

نعوض y و z في المعادلة (3) نحصل على : $3x+4(3)+3(1-x)=15$

أي : $3x+12+3-3x=15$

أي : $15=15$ و هذا محقق دائما .

نتيجة : $\begin{cases} y=3 \\ z=1-x \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} x=1-z \\ y=3 \end{cases}$

منه : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x=1-t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$ حيث $t\in IR$

التمرين — 27

حل في IR^3 جمل المعادلات التالية :

1 – $\begin{cases} 2x-y-7z+26=0 \\ x+y-2z+7=0 \\ -x-2y+z-3=0 \end{cases}$

2 – $\begin{cases} 4x+2y-z+2=0 \\ x+y-2z=0 \\ -x-2y+z+1=0 \end{cases}$

الحــل — 27

1 –
$$\begin{cases} 2x-y-7z+26=0 \text{ ......} (1) \\ x+y-2z+7=0 \text{ ....} (2) \\ -x-2y+z-3=0 \text{ ....} (3) \end{cases}$$

نحل جملة المعادلتين (1) و (2) ذات المجهولين x و y بدلالة z :

$$\det = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1=3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -7z+26 \\ 1 & -2z+7 \end{vmatrix}}{3} = \frac{2z-7+7z-26}{3} = 3z-11$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -7z+26 & 2 \\ -2z+7 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-7z+26+4z-14}{3} = -z+4$$

نعوض x و y في المعادلة (3) نحصل على : $-(3z-11)-2(-z+4)+z-3=0$

أي : $-3z+11+2z-8+z-3=0$

أي : $0=0$ دائما محقق .

نتيجة : الجملة تكافئ $\begin{cases} x=3z-11 \\ y=-z+4 \\ z\in IR \end{cases}$

إذن : حلولها هي مجموعة غير منتهية .

هندسيا : إذا اعتبرنا المستويات (P) ، (Q) ، (R) التي معادلاتها على الترتيب (1) ، (2) ، (3) فإن تقاطعها هي المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=3t-11 \\ y=-t+4 \\ z=t \end{cases}$ حيث $t\in IR$

2 –
$$\begin{cases} 4x+2y-z+2=0 \text{ ......} (1) \\ x+y-2z=0 \text{ ....} (2) \\ -x-2y+z+1=0 \text{ ......} (3) \end{cases}$$

نحل جملة المعادلتين (1) و (2) ذات المجهولين x و y بدلالة z :

$$\det = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 2 = 2$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -z+2 \\ 1 & -2z \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-4z + z - 2}{2} = \dfrac{-3}{2} z - 1 \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} -z+2 & 4 \\ -2z & 1 \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-z + 2 + 8z}{2} = \dfrac{7}{2} z + 1 \end{cases}$$

نعوض x و y في المعادلة (3) نحصل على : $-\left(\frac{-3}{2} z - 1\right) - 2\left(\frac{7}{2} z + 1\right) + z + 1 = 0$.

أي : $\frac{3}{2} z + 1 - 7z - 2 + z + 1 = 0$

أي : $\frac{-9}{2} z = 0$

أي : $z = 0$

بالتعويض في x و y نحصل على $x = -1$ ؛ $y = 1$

نتيجة : الجملة تقبل حلا وحيدا هو الثلاثية $\{(-1 ; 1 ; 0)\}$

التمرين ــ 28

لتكن النقط $A(2 ; 1 ; 1)$ ؛ $B(3 ; 0 ; 1)$ ؛ $C(0 ; 1 ; 5)$ ؛ $D(-1 ; 0 ; 1)$ ؛ $E(6 ; 2 ; 3)$

1 ــ تحقق أن النقط A ، B ، C تعرف مستويا (ABC) . يطلب معادلته الديكارتية

2 ــ عين التمثيل الوسيطي للمستقيم (DE)

3 ــ عين احداثيات النقطة I نقطة تقاطع المستقيم (DE) و المستوي (ABC)

الحـل ــ 28

1 ــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 0-1 \\ 1-1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-1 \\ 5-1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

بما أن $\frac{0}{-1} \neq \frac{-2}{1}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا متوازيان

منه النقط A ، B ، C تعين مستويا .

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u} \\ \overrightarrow{AC} \perp \vec{u} \end{cases}$ منه $\begin{cases} a - b = 0 \\ -2a + 4c = 0 \end{cases}$

منه $\begin{cases} a = b \\ c = \dfrac{2a}{4} \end{cases}$

من أجل $a = 2$ نحصل على : $b = 2$ و $c = 1$

منه : $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

نتيجة : معادلة المستوي (ABC) هي : $2x + 2y + z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي

$A \in (ABC)$ إذن : $2(2) + 2(1) + 1 + \alpha = 0$

منه : $\alpha = -7$

منه : معادلة المستوي (ABC) هي : $2x+2y+z-7=0$

2 ـ $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}6+1\\2-0\\3-1\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$

إذن : (DE) يشمل النقطة D و شعاع توجيهه $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}7\\2\\2\end{pmatrix}$

منه تمثيله الوسيطي : $\begin{cases}x+1=7t\\y-0=2t\\z-1=2t\end{cases}$

أي : $\begin{cases}x=7t-1\\y=2t\\z=2t+1\end{cases}$ حيث $t\in IR$

3 ـ $\begin{cases}2x+2y+z-7=0\\x=7t-1\\y=2t\\z=2t+1\end{cases}$ منه $\begin{cases}2(7t-1)+2(2t)+(2t+1)-7=0\\x=7t-1\\y=2t\\z=2t+1\end{cases}$

أي $\begin{cases}14t-2+4t+2t-6=0\\x=7t-1\\y=2t\\z=2t+1\end{cases}$

أي $\begin{cases}t=8/20=2/5\\x=7(2/5)-1\\y=2(2/5)\\z=2(2/5)+1\end{cases}$

أي $\begin{cases}x=9/5\\y=4/5\\z=9/5\end{cases}$

نتيجة : (DE) و (ABC) يتقاطعان في النقطة I(9/5 ; 4/5 ; 9/5)

التمرين ـ 29

لتكن النقط A(1 ; 0 ; 2) ؛ B(3 ; 2 ; 4) ؛ C(1 ; 4 ; 2) ؛ D(5 ; 2 ; 4)

نعرف النقط I ، J ، K كمايلي : I منتصف [AB] ، J منتصف [CD] ، $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

1 ـ عين احداثيات النقط I ، J ، K ثم تحقق أنها ليست على استقامة واحدة .

2 ـ تحقق أن الشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ ناظمي للمستوي (IJK) ثم أكتب معادلة ديكارتية له .

3 ـ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (AD) ثم تحقق أن (IJK) و (AD) يتقاطعان في نقطة L حيث $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

الحـل ـ 29

1 ـ $I\left(\frac{3+1}{2};\frac{2+0}{2};\frac{4+2}{2}\right)$ أي I(2 ; 1 ; 3)

$J\left(\frac{5+1}{2};\frac{2+4}{2};\frac{4+2}{2}\right)$ أي J(3 ; 3 ; 3)

لتكن K(x ; y ; z)

$\overrightarrow{BK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ يكافئ $\begin{cases}x-3=\frac{1}{4}(1-3)\\y-2=\frac{1}{4}(4-2)\\z-4=\frac{1}{4}(2-4)\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ y = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ z = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \end{cases}$

نتيجة : $k(5/2 ; 5/2 ; 7/2)$

خلاصة : $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 3-2 \\ 3-1 \\ 3-3 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 3-\frac{5}{2} \\ 3-\frac{5}{2} \\ 3-\frac{7}{2} \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{KJ}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$

$\frac{1/2}{2} \neq \frac{1/2}{1}$ إذن : $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{KJ}$ ليسا متوازيان

منه : النقط I ، J ، K ليست على استقامة واحدة .

2 ــ أي $\vec{u} \cdot \overrightarrow{IJ} = -2(1) + 1(2) - 1(0) = -2 + 2 = 0$

$\vec{u} \cdot \overrightarrow{JK} = -2(1/2) + 1(1/2) - 1(-1/2) = -1 + 1 = 0$

نتيجة : $\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{JK} = 0 \end{cases}$ إذن : $\vec{u}$ عمودي على كل من $\overrightarrow{IJ}$ و $\overrightarrow{JK}$

منه : $\vec{u}$ شعاع ناظمي للمستوي (IJK)

إذن : (IJK) له المعادلة $-2x + y - z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي

$I \in (IJK)$ إذن : $-2(2) + 1 - 3 + \alpha = 0$

منه $\alpha = 6$

خلاصة : معادلة المستوي (IJK) : $-2x + y - z + 6 = 0$

3 ــ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 5-1 \\ 2-0 \\ 4-2 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

منه التمثيل الوسيطي للمستقيم (AD) : $\begin{cases} x - 1 = 4t \\ y - 0 = 2t \\ z - 2 = 2t \end{cases}$

أي $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 2t \\ z = 2t + 2 \end{cases}$ حيث $t \in IR$

تقاطع (AD) و المستوي (IJK)

$\begin{cases} -2x + y - z + 6 = 0 \\ x = 4t + 1 \\ y = 2t \\ z = 2t + 2 \end{cases}$ منه $-2(4t + 1) + 2t - (2t + 2) + 6 = 0$

أي $-8t - 2 + 2t - 2t - 2 + 6 = 0$

أي $t = \frac{-2}{-8}$

أي $t = 1/4$

منه : $\begin{cases} x = 4(1/4) + 1 = 2 \\ y = 2(1/4) = 1/2 \\ z = 2(1/4) + 2 = 5/2 \end{cases}$

نتيجة : $L(2 ; 1/2 ; 5/2)$

إذن : $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}2-1\\ \frac{1}{2}-0\\ \frac{5}{2}-2\end{pmatrix}$. أي $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}1\\ 1/2\\ 1/2\end{pmatrix}$

منه : $4\,\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 2\end{pmatrix}$ أي $4\,\overrightarrow{AL}=\overrightarrow{AD}$

منه : $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

تمارين نماذج للبكالوريا

التمرين ــ 1

لتكن $A(-1\,;2\,;0)$ نقطة من الفضاء .

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل A و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي له .

الحـل ــ 1

(P) له المعادلة $x+y-z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي

$A\in(P)$ إذن : $-1+2-0+\alpha=0$

أي : $\alpha=-1$

منه : معادلة المستوي (P) هي $x+y-z-1=0$

ملاحظة : يمكن تعيين معادلة المستوي (P) بطريقة أخرى كما يلي :

لتكن $M(x\,;y\,;z)$ نقطة من الفضاء إذن : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\ y-2\\ z\end{pmatrix}$

$M\in(P)$ يكافئ $\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}$

يكافئ $\overrightarrow{AM}\,.\,\vec{u}=0$

يكافئ $1(x+1)+1(y-2)-1(z)=0$

يكافئ $x+y-z-1=0$ و هي معادلة المستوي (P)

التمرين ــ 2

لتكن $A(1\,;2\,;3)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$ شعاع .

1 ــ عين معادلة للمجموعة (E) من النقط M التي تحقق $\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM}=2$

2 ــ ما هي طبيعة المجموعة (E) ؟

الحـل ــ 2

1 ــ لتكن $M(x\,;y\,;z)$ إذن : $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-1\\ y-2\\ z-3\end{pmatrix}$

$\vec{u}\,.\,\overrightarrow{AM}=2$ يكافئ $1(x-1)+2(y-2)-1(z-3)=0$

يكافئ $x+2y-z-1-4+3=0$

يكافئ $x+2y-z-2=0$ و هي معادلة (E)

2 ــ (E) لها معادلة من الشكل $ax+by+cz+d=0$ حيث $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$

إذن : (E) هي المستوي ذو المعادلة $x + 2y - z - 2 = 0$

التمرين — 3

(P) مستوي معادلته $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y - z = 0$

عين معلما ديكارتيا للمستوي (P)

الحــل — 3

يكفي تعيين ثلاث نقط من المستوي (P) ليست على استقامة واحدة .

ليكن $x = 0$ و $y = 0$ إذن : $z = 0$ منه $A(0 ; 0 ; 0)$ نقطة من (P)

ليكن $x = 1$ و $y = 2$ إذن : $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} - z = 0$ أي $z = 1$

منه $B(1 ; 2 ; 1)$ نقطة من (P)

ليكن $x = 0$ و $y = 4$ إذن : $0 + \frac{4}{4} - z = 0$ منه $z = 1$

إذن : $C(0 ; 4 ; 1)$ نقطة من (P)

نتيجة : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$

$\frac{4}{2} \neq \frac{0}{1}$ إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا متوازيان .

منه : الثلاثية $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ تعين معلما ديكارتيا للمستوي (P)

التمرين — 4

(P) هو المستوي ذو المعادلة $x + y - 2z + 3 = 0$

نعتبر النقطة $A(2 ; -3 ; 1)$ و الشعاعين $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix}$

بين أن $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ معلم متعامد في المستوي (P)

الحــل — 4

حتى يكون $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ معلما للمستوي (P) يلزم و يكفي أن تتحقق الشروط التالية :

(1) : $A \in (P)$

(2) : توجد نقطة B من (P) حيث $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$

(3) : توجد نقطة C من (P) حيث $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

(4) : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا متوازيان

هل الشرط (1) محقق ؟ نعوض احداثيات A في معادلة (P) كما يلي :

$2 - 3 - 2(1) + 3 = 2 - 2 = 0$

إذن : $A \in (P)$ أي الشرط (1) محقق .

هل الشرط (2) محقق ؟ لتكن $B(x ; y ; z)$

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ يكافئ $\begin{cases}x - 2 = 1\\y + 3 = 1\\z - 1 = 1\end{cases}$

يكافئ $\begin{cases}x = 3\\y = -2\\z = 2\end{cases}$

منه : $B(3 ; -2 ; 2)$

هل $B \in (P)$ ؟ $3 - 2 - 2(2) + 3 = 6 - 6 = 0$

نتيجة : $\left.\begin{matrix}B \in (P)\\\overrightarrow{AB} = \vec{u}\end{matrix}\right\}$ إذن : الشرط (2) محقق .

هل الشرط (3) محقق ؟ لتكن $C(x ; y ; z)$

$\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ يكافئ $\begin{cases} x - 2 = 3 \\ y + 3 = -3 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 5 \\ y = -6 \\ z = 1 \end{cases}$

منه : $C(5 ; -6 ; 1)$

هل $C \in (P)$ ؟ $5 - 6 - 2(1) + 3 = 8 - 8 = 0$

نتيجة : $\left.\begin{array}{l} C \in (P) \\ \overrightarrow{AC} = \vec{v} \end{array}\right\}$ إذن : الشرط (3) محقق .

هل الشرط (4) محقق ؟ لدينا $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

بما أن $\frac{-3}{1} \neq \frac{3}{1}$ فإن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا متوازيان

إذن : الشرط (4) محقق .

خلاصة : الشروط (1) ، (2) ، (3) ، (4) محققة إذن $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ هو فعلا معلم للمستوي (P)

يبقى أن نتحقق أن $\vec{u} \perp \vec{v}$ حتى يكون المعلم متعامد .

لدينا : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3(1) - 3(1) + 0(1) = 0$

إذن : $\vec{u} \perp \vec{v}$

منه : المعلم $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$ معلم متعامد .

التمرين — 5

(P) مستوي يشمل النقط $A(1 ; -1 ; -1)$ ؛ $B(0 ; 1 ; 1)$ ؛ $C(1 ; 2 ; 0)$

1 — عين شعاعا ناظميا لـ (P)

2 — استنتج معادلة ديكارتية لـ (P)

الحل — 5

1 — $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 - 1 \\ 1 + 1 \\ 1 + 1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 - 1 \\ 2 + 1 \\ 0 + 1 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

بما أن $\frac{3}{2} \neq \frac{0}{-1}$ فإن A ، B ، C ليست على استقامة واحدة

إذن فعلا النقط A ، B ، C تعين مستوي و ليكن (P)

$\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P) يكافئ $\begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} -a + 2b + 2c = 0 \\ 3b + c = 0 \end{cases}$

من أجل $b = 1$ نحصل على : $\begin{cases} a = 2b + 2c \\ c = -3 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} a = 2 + 2(-3) = -4 \\ c = -3 \end{cases}$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

2 ـ $\vec{u}\begin{pmatrix}-4\\1\\-3\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P) إذن (P) له المعادلة :
$-4x + y - 3z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .
$A \in (P)$ إذن : $-4(1) - 1 - 3(-1) + \alpha = 0$
أي $\alpha = 2$.
منه : معادلة المستوي (P) هي : $-4x + y - 3z + 2 = 0$

التمرين ـ 6

(P) هو مجموعة النقط المعرفة بالتمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2m \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - m \end{cases}$$ **حيث $t \in IR$ و $m \in IR$**

لتكن النقطة $A(1 ; -2 ; 1)$ و الشعاعين $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

1 ـ بين أن (P) هو مستوي للمعلم $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$

2 ـ أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P)

الحـل ـ 6

1 ـ من أجل $t = 0$ و $m = 0$ نحصل على $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 1 \end{cases}$

منه النقطة $A(1 ; -2 ; 1)$ تنتمي إلى (P)

لتكن $B(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء .

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ يكافئ $\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y + 2 = 3 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

منه : $B(2 ; 1 ; 1)$

من أجل $m = 0$ و $t = 1$ نحصل على $\begin{cases} x = 1 + 1 + 0 = 2 \\ y = -2 + 3 = 1 \\ z = 1 - 0 = 1 \end{cases}$

منه النقطة $B(2 ; 1 ; 1)$ تنتمي إلى (P)

لتكن $C(x ; y ; z)$ نقطة من الفضاء .

$\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ يكافئ $\begin{cases} x - 1 = 2 \\ y + 2 = 0 \\ z - 1 = -1 \end{cases}$

يكافئ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{cases}$

منه : $C(3 ; -2 ; 0)$

من أجل $m = 1$ و $t = 0$ نحصل على $\begin{cases} x = 1 + 0 + 2 = 3 \\ y = -2 + 0 = -2 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{cases}$

منه : $C(3 ; -2 ; 0)$ تنتمي إلى (P)

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

بما أن $2/1 \neq 0/3$ فإن A ، B ، C ليست على استقامة واحدة

خلاصة : A ، B ، C ليست على استقامة واحدة من نفس المجموعة (P)

إذن : (P) هو المستوي للمعلم $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ أي المعلم $(A ; \vec{u} ; \vec{v})$

2 ــ ليكن $\vec{w}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\begin{cases} \vec{w} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{w} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a + 3b = 0 \\ 2a - c = 0 \end{cases}$

من أجل $a = 3$ نحصل على $\begin{cases} 3 + 3b = 0 \\ 6 - c = 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} b = -1 \\ c = 6 \end{cases}$

نتيجة : $\vec{w}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

منه (P) له المعادلة $3x - y + 6z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي

$A \in (P)$ إذن : $3(1) - (-2) + 6(1) + \alpha = 0$

أي $\alpha = -11$

منه : (P) له المعادلة $3x - y + 6z - 11 = 0$

تحقيق : $\begin{cases} x = 1 + t + 2m \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - m \end{cases}$ إذن : $3x - y + 6z - 11 = 3 + 3t + 6m + 2 - 3t + 6 - 6m - 11$

$= 3t + 6m - 3t - 6m + 11 - 11$

$= 0$

<u>التمرين ــ 7</u>

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(1 ; -2 ; 3)$ و $\vec{i}$ ، $\vec{j}$ شعاعي توجيه له .

<u>الحــل ــ 7</u>

$\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ؛ $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ هما شعاعي الوحدة مستقلين خطيا

ليكن، $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{i} \\ \vec{u} \perp \vec{j} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$

منه : $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P) .

ليكن $c = 1$ إذن : $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي لـ (P)

منه : (P) له المعادلة $z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .

$A \in (P)$ إذن : $3 + \alpha = 0$

منه $\alpha = -3$

نتيجة : (P) له المعادلة $z - 3 = 0$

<u>التمرين ــ 8</u>

(P) مجموعة معرفة بــ $\begin{cases} x = 2 - t + m \\ y = 1 + 3m \\ z = 1 - t \end{cases}$ **حيث $t \in IR$ و $m \in IR$**

بين أن (P) هو مستوي يطلب كتابة معادلة ديكارتية له .

الحـــل ــ 8

$\begin{cases} x = 2 - t + m \\ y = 1 + 3m \\ z = 1 - t \end{cases}$ منه $\begin{cases} -3x = -6 + 3t - 3m \\ y = 1 + 3m \\ 3z = 3 - 3t \end{cases}$

منه $-3x + y + 3z = -6 + 3t - 3m + 1 + 3m + 3 - 3t$

منه $-3x + y + 3z = -2$

منه $-3x + y + 3z + 2 = 0$

نتيجة : (P) هي جزء من المستوي ذو المعادلة $-3x + y + 3z + 2 = 0$

لندرس الآن الحالة العكسية .

ليكن (Q) المستوي ذو المعادلة $-3x + y + 3z + 2 = 0$

نضع $\begin{cases} y = 1 + 3m \\ z = 1 - t \end{cases}$ منه $-3x + (1 + 3m) + 3(1 - t) + 2 = 0$

منه $-3x + 1 + 3m + 3 - 3t + 2 = 0$

منه $-3x + 3m - 3t + 6 = 0$

منه $-3x = -3m + 3t - 6$

منه $x = m - t + 2$

منه $x = 2 - t + m$

نتيجة : (Q) هو جزء من (P)

خلاصة : $(P) \subset (Q)$ و $(Q) \subset (P)$ إذن : $(P) = (Q)$

أي (P) هو المستوي ذو المعادلة $-3x + y + 3z + 2 = 0$

التمرين ــ 9

(P) مستوي معادلته $2x + y - 2z + 5 = 0$

1 ــ عين $\vec{u}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

2 ــ بين أن الشعاع $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه للمستوي (P)

الحـــل ــ 9

1 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي لــ (P)

2 ــ $\vec{u} . \vec{v} = 2(1) + 1(0) - 2(1) = 2 - 2 = 0$

إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان .

منه : $\vec{v}$ هو شعاع توجيه للمستوي (P)

التمرين ــ 10

أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (P) الذي يشمل النقطة $A(-3 ; 1 ; 2)$ و يوازي المستقيمين (D) و (T) اللذين تمثيلاهما الوسيطيين هما على الترتيب :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 4 + t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 2 + k \\ y = -5 + k \\ z = 4 + k \end{cases}$$ **حيث $t \in IR$ و $k \in IR$**

الحـــل ــ 10

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (T)

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ \vec{v} \perp \vec{n} \end{cases}$ يكافئ $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 0 \end{cases}$

من أجل $a = 1$ نحصل على $\begin{cases} 1 - b + c = 0 \\ 1 + b + c = 0 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} b = 1 + c \\ 2 + 2c = 0 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} b = 1 + c \\ c = -1 \end{cases}$

منه : $\begin{cases} b = 1 - 1 = 0 \\ c = -1 \end{cases}$

نتيجة : $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) منه (P) له المعادلة $x - z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .

$A \in (P)$ إذن : $-3 - 2 + \alpha = 0$

أي $\alpha = 5$

منه : (P) له المعادلة $x - z + 5 = 0$

التمرين – 11

(D) و (T) مستقيمان معرفان بالتمثيلين الوسيطيين التاليين على الترتيب :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} x = 5 + 2k \\ y = 2k \\ z = -5 - k \end{cases}$$ **حيث** $t \in IR$ **و** $k \in IR$

بين أن يوجد مستوي وحيد (P) يشمل (D) و (T) يطلب معادلته الديكارتية

الحـل – 11

$\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه للمستقيم (D) و $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه المستقيم (T)

$-3/2 \neq 1/2$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا مرتبطين خطيا .

منه : (D) و (T) ليسا متوازيان .

إذن : إما (D) و (T) من نفس المستوي متقاطعان

أو (D) و (T) من مستويين مختلفين

نبحث عن تقاطع (D) و (T) :

$\begin{cases} 5 + 2k = 2 - 3t \\ 2k = 1 + t \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 5 + 1 + t = 2 - 3t \\ 2k = 1 + t \end{cases}$

منه : $\begin{cases} 4t = -4 \\ k = \dfrac{1 + t}{2} \end{cases}$

منه : $\begin{cases} t = -1 \\ k = 0 \end{cases}$

من أجل $k = 0$ نحصل على : $\begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \\ z = -5 \end{cases}$

من أجل $t = -1$ نحصل على : $\begin{cases} x = 2 - 3(-1) = 5 \\ y = 1 - 1 = 0 \\ z = -3 + 2(-1) = -5 \end{cases}$

نتيجة : (D) و (T) يتقاطعان في النقطة $A(5 ; 0 ; -5)$

منه : (D) و (T) ينتميان إلى نفس المستوي الوحيد (P)

البحث عن معادلة (P)

لدينا (P) يشمل النقطة A(5 ; 0 ; -5) و شعاعي توجيهه $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$ و $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

ليكن $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$\begin{cases}\vec{n}\perp\vec{u}\\ \vec{n}\perp\vec{v}\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}-3a+b+2c=0\\ 2a+2b-c=0\end{cases}$

من أجل a = 1 نحصل على : $\begin{cases}b+2c-3=0\\ 2b-c+2=0 \;....\; (1)\end{cases}$

منه : $\begin{cases}b+2c-3=0\\ 4b-2c+4=0\end{cases}$

بالجمع : $5b+1=0$ أي $b=-1/5$

بالتعويض في (1) : $-\frac{2}{5}-c+2=0$ منه $c=2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$

نتيجة : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1/5\\8/5\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي لـــ (P) أي $\vec{m}\begin{pmatrix}5\\-1\\8\end{pmatrix}$ هو أيضا شعاع ناظمي له

منه (P) له المعادلة $5x-y+8z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي

$A\in(P)$ إذن : $5(5)-0+8(-5)+\alpha=0$

أي : $\alpha=15$

خلاصة : المستوي (P) الوحيد الذي يشمل (D) و (T) له المعادلة : $5x-y+8z+15=0$

تحقيق : $5(2-3t)-(1+t)+8(-3+2t)+15=10-15t-1-t-24+16t+15$

$=0$

$5(5+2k)-2k+8(-5-k)+15=25+10k-2k-40-8k+15$

$=0$

التمرين ــ 12

(P) مستوي معادلته $2x+y-z+1=0$ و (Q) مستوي معادلته $-x+3y-2z+4=0$

1 ــ بين أن المستويين (P) و (Q) متقاطعان

2 ــ عين شعاع توجيه و نقطة من مستقيم تقاطعهما .

الحــل ــ 12

1 ــ $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (Q)

$\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

$3/1 \neq -1/2$ إذن : $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ليسا متوازيان

منه : المستويان (P) و (Q) ليسا متوازيان فهما إذن متقاطعان .

2 ــ البحث عن تقاطع (P) و (Q)

$\begin{cases}2x+y-z+1=0\\ -x+3y-2z+4=0\end{cases}$

لنبحث عن x و y بدلالة z

$$\det=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6+1=7$$

$$x=\frac{1}{7}\begin{vmatrix}1 & -z+1\\ 3 & -2z+4\end{vmatrix}=\frac{1}{7}(-2z+4+3z-3)=\frac{1}{7}z+\frac{1}{7}$$

$$y = \frac{1}{7}\begin{vmatrix} -z+1 & 2 \\ -2z+4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{7}(z-1+4z-8) = \frac{5}{7}\ z - \frac{9}{7}$$

نتيجة : تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (D) الذي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{7}\ t + \frac{1}{7} \\ y = \frac{5}{7}\ t - \frac{9}{7} \\ z = t \end{cases} \quad \text{حيث } t \in IR$$

منه : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1/7 \\ 5/7 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (D) و $A(1/7 ; -9/7 ; 0)$ هي نقطة منه .

التمرين ــ 13

(P) مستوي معادلته $x + y - z = 0$ و (Q) مستوي معادلته $2x - y - z - 1 = 0$

عين شعاع توجيه المستقيم (D) حيث $(D) = (P) \cap (Q)$

الحــل ــ 13

لنبحث عن التمثيل الوسيطي للمستقيم (D)

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -z \\ -1 & -z-1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3}(-z-1-z) = \frac{2}{3}\ z + \frac{1}{3} \\ y = \frac{-1}{3}\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -z-1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{3}(-2z+z+1) = \frac{1}{3}\ z - \frac{1}{3} \end{cases}$$

نتيجة : (D) له التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}\ t + \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3}\ t - \frac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad \text{حيث } t \in IR$$

منه : $\vec{u}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (D)

التمرين ــ 14

لتكن النقط $A(0 ; 1 ; 1)$ ؛ $B(1 ; 0 ; 0)$ ؛ $C(-1 ; 2 ; 1)$ ؛ $D(0 ; 1 ; 2)$

بين أن النقط A ، B ، C ، D من نفس المستوي ثم عين معادلة ديكارتية له .

الحــل ــ 14

ليكن (P) مستوي معادلته $\alpha x + \beta y + \gamma z + \lambda = 0$ حيث α ، β ، γ ، λ ثوابت حقيقية .

تكون النقط A ، B ، C ، D من نفس المستوي (P) إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{cases} \alpha(0) + \beta(1) + \gamma(1) + \lambda = 0 \\ \alpha(1) + \beta(0) + \gamma(0) + \lambda = 0 \\ \alpha(-1) + \beta(2) + \gamma(1) + \lambda = 0 \\ \alpha(0) + \beta(1) + \gamma(2) + \lambda = 0 \end{cases} \quad \text{يكافئ} \quad \begin{cases} \beta + \gamma + \lambda = 0 \ \dots\dots\dots\dots (1) \\ \alpha + \lambda = 0 \ \dots\dots\dots\dots (2) \\ -\alpha + 2\beta + \gamma + \lambda = 0 \ \dots\dots (3) \\ \beta + 2\gamma + \lambda = 0 \ \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

من (2) : $\lambda = -\alpha$

بالتعويض في (3) نحصل على : $\lambda + 2\beta + \gamma + \lambda = 0$

أي : $2\beta + \gamma + 2\lambda = 0$ .... (5)

نتيجة :
$$\begin{cases} \beta+\gamma+\lambda=0 \text{ .... (a)} \\ 2\beta+\gamma+2\lambda=0 \text{ .... (b)} \\ \beta+2\gamma+\lambda=0 \text{ .... (c)} \\ \lambda=-\alpha \text{ .... (d)} \end{cases}$$

نطرح (a) من (c) نحصل على : $2\gamma-\gamma=0$ أي $\gamma=0$

نعوض γ في (a) و (b) و (c) نحصل على :
$$\begin{cases} \beta+\lambda=0 \\ 2\beta+2\lambda=0 \\ \beta+\lambda=0 \end{cases}$$
أي $\beta+\lambda=0$

منه : $\beta=-\lambda$

خلاصة : $\alpha=-\lambda$ ؛ $\beta=-\lambda$ ؛ $\gamma=0$ ؛ $\lambda\in IR^*$

إذن : يكفي أن نأخذ $\lambda=-1$ منه $\alpha=\beta=1$

و عليه فإن النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى المستوي (P) ذو المعادلة $x+y-1=0$

تحقيق :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ إذن : $\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{AB}=1-1+0=0\\ \vec{u}.\overrightarrow{AC}=-1+1+0=0\end{cases}$

منه : $\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{u}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}$

إذن : $\vec{u}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

منه : معادلة (ABC) : $x+y+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي .

$A\in(ABC)$ إذن : $0+1+\alpha=0$ منه $\alpha=-1$

نتيجة : معادلة (ABC) هي : $x+y-1=0$

$0+1-1=0$ إذن : $D(0\,;1\,;2)$ تنتمي إلى (ABC)

التمرين ـــ 15

لتكن النقط $A(-1\,;2\,;1)$ ؛ $B(1\,;-6\,;-1)$ ؛ $C(2\,;2\,;2)$

1 ـــ بين أن النقط A ، B ، C تعرف مستويا و ليكن (ABC)

2 ـــ عين تقاطع المستوي (ABC) مع المستوي (P) ذو المعادلة $x-3y+z-4=0$

الحـــل ـــ 15

1 ـــ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1+1\\-6-2\\-1-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-8\\-2\end{pmatrix}$ ؛ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2+1\\2-2\\2-1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

$\frac{3}{2}\neq\frac{0}{-8}$ منه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ليسا متوازيان .

إذن : النقط A ، B ، C تعين مستويا (ABC)

لنبحث عن معادلة المستوي (ABC)

ليكن $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

$\begin{cases}\vec{u}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{u}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ يكافئ $\begin{cases}2a-8b-2c=0\\ 3a+c=0\end{cases}$

من أجل $c = -3$ نحصل على : $\begin{cases} 2a - 8b + 6 = 0 \\ 3a - 3 = 0 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} 2a + 6 = 8b \\ a = 1 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} 2 + 6 = 8b \\ a = 1 \end{cases}$

أي : $\begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$

نتيجة : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)

منه : معادلة المستوي (ABC) : $x + y - 3z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .

إذن : $A \in (ABC)$: $-1 + 2 - 3 + \alpha = 0$

أي : $\alpha = 2$

خلاصة : معادلة المستوي (ABC) هي $x + y - 3z + 2 = 0$

2 ــ $\begin{cases} x - 3y + z - 4 = 0 \\ x + y - 3z + 2 = 0 \end{cases}$ لنبحث عن x و y بدلالة z

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 4$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -3 & z-4 \\ 1 & -3z+2 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(9z - 6 - z + 4) = 2z - \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} z-4 & 1 \\ -3z+2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(z - 4 + 3z - 2) = z - \frac{3}{2} \end{cases}$$

نتيجة : المستوي (ABC) يتقاطع مع المستوي (P) في المستقيم الذي تمثيله الوسيطي :

$$\begin{cases} x = 2t - \frac{1}{2} \\ y = t - \frac{3}{2} \\ z = t \end{cases} \quad t \in IR \text{ حيث}$$

التمرين ــ 16

(P) و (Q) مستويان معادلاتهما على الترتيب $x + y + z = 0$ و $x - y + z - 4 = 0$

1 ــ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (Q)

2 ــ عين معادلة ديكارتية للمستوي (R) الذي يشمل النقطة $A(1 ; 1 ; 2)$ و العمودي على (d)

الحــل ــ 16

1 ــ $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ نبحث عن x و y بدلالة z

$$\det = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} 1 & z \\ -1 & z-4 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}(z - 4 + z) = -z + 2 \\ y = \frac{-1}{2}\begin{vmatrix} z & 1 \\ z-4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}(z - z + 4) = -2 \end{cases}$$

نتيجة : (d) له التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = -t + 2 \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$ حيث $t \in IR$

2 – $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (d)

بما أن (R) عمودي على (d) فإن $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (R)

منه : (R) له المعادلة $-x+z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي .

$A\in(R)$ إذن : $-1+2+\alpha=0$

أي $\alpha=-1$

نتيجة : معادلة المستوي (R) هي : $-x+z-1=0$

التمرين – 17

(P) ، (Q) ، (R) ثلاث مستويات معادلاتها الديكارتية كما يلي :

$(P): \ 2x+3y-z=-2$

$(Q): \ 5y-4z=1$

$(R): \ z=1$

بين أن المستويات (P) ، (Q) ، (R) تشترك في نقطة وحيدة يطلب تعيينها .

الحـل – 17

إذا وجدت نقطة مشتركة بين المستويات (P) ، (Q) ، (R) فإن احداثياتها $(x;y;z)$

هي حل للجملة

$$\begin{cases}2x+3y-z=-2 \ ......\ (1)\\ 5y-4z=1\ ....\ (2)\\ z=1\ ....\ (3)\end{cases}$$

نعوض z في المعادلة (2) نحصل على : $5y-4(1)=1$

أي : $5y=5$

منه $y=1$

نعوض z و y في المعادلة (1) نحصل على : $2x+3(1)-1=-2$

أي : $2x=-4$

منه : $x=-2$

نتيجة : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في نقطة وحيدة $A(-2;1;1)$

التمرين – 18

فسر هندسيا جملة المعادلتين : $\begin{cases}4x+6y-12z=5\\ 6x+9y-18z=8\end{cases}$

الحـل – 18

إذا اعتبرنا في الفضاء (P) المستوي ذو المعادلة $4x+6y-12z-5=0$

و المستوي (Q) ذو المعادلة $6x+9y-18z-8=0$ فإن الجملة $\begin{cases}4x+6y-12z=5\\ 6x+9y-18z=8\end{cases}$

تعبر عن تقاطع المستويين (P) و (Q) كمايلي : $\det=\begin{vmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{vmatrix}=0$

نتيجة : إما المستويين (P) و (Q) متطابقين أو متوازيين لا يتقاطعان

بما أن $\begin{cases}4/6=6/9=-12/-18=2/3\\ -5/8\neq 2/3\end{cases}$

فإن المستويين (P) و (Q) ليسا متطابقين فهما إذن متوازيان تماما . (لا يتقاطعان) و عليه فإن الجملة لا تقبل حلولا .

التمرين – 19

لتكن الجملة $(I)\begin{cases}x+y=-1\ ....\ (1)\\ 2x+y+2z=0\ ....\ (2)\\ 4x+4y+z+3=0\ ......\ (3)\end{cases}$

نفرض أن المعادلة (1) هي معادلة مستوي (P) و أن المعادلة (2) هي معادلة مستوي (Q)

1 – أثبت أن (P) و (Q) يتقاطعان في مستقيم (d) يشمل النقطة $A(1;-2;0)$ و موجه بالشعاع $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$

2 – ليكن (R) المستوي ذو المعادلة (3)

تحقق أن (d) و (R) يتقاطعان في نقطة وحيدة ثم استنتج حلول الجملة (I)

الحـل ـ 19

1 ـ
$$\begin{cases} x + y = -1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ 2x + y + 2z = 0 \;\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بطرح (1) من (2) نحصل على : $2x - x + 2z = 0 + 1$

أي : $x = 1 - 2z$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على : $1 - 2z + y = -1$

منه $y = 2z - 2$

نتيجة : تقاطع المستويين (P) و (Q) هو المستقيم (d) ذو التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x = -2t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = t \end{cases} \quad \text{حيث } t \in IR$$

منه (d) يشمل النقطة $A(1 ; -2 ; 0)$ (من أجل $t = 0$) و له شعاع توجيه $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2 ـ تقاطع (d) و (R) هي حلول الجملة
$$\begin{cases} 4x + 4y + z + 3 = 0 \\ x = -2t + 1 \\ y = 2t - 2 \\ z = t \end{cases}$$

منه : $4(-2t + 1) + 4(2t - 2) + t + 3 = 0$

أي : $-8t + 4 + 8t - 8 + t + 3 = 0$

أي : $t = 1$

منه :
$$\begin{cases} x = -2(1) + 1 = -1 \\ y = 2(1) - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

نتيجة : (d) و (R) يتقاطعان في نقطة وحيدة $w(-1 ; 0 ; 1)$

إذن : المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في نقطة وحيدة $w(-1 ; 0 ; 1)$ منه الجملة (I) تقبل حلا وحيدا هو $(-1 ; 0 ; 1)$

التمرين ـ 20

(P) و (Q) مستويين معادلاتهما على الترتيب $2x - y + 5 = 0$ و $3x + y - z = 0$

بين أن (P) و (Q) يتقاطعان وفق مستقيم تمثيله الوسيطي
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t + 5 \end{cases} \quad t \in R$$

الحـل ـ 20

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \;\ldots\ldots\ldots (1) \\ 3x + y - z = 0 \;\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

بجمع (1) و (2) نحصل على : $5x - z + 5 = 0$ أي : $z = 5x + 5$

المعادلة (1) تكافئ $y = 2x + 5$

منه الجملة
$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$$
تكافئ
$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ z = 5x + 5 \end{cases}$$

تكافئ
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t + 5 \\ t \in IR \end{cases}$$
و هو التمثيل الوسيطي لتقاطع المستويين (P) و (Q)

التمرين ـ 21

حل في IR^3 جمل المعادلات التالية ثم فسر النتائج هندسيا

1 ـ
$$\begin{cases} 4x + 2y + z = 4 \\ 4x - 2y + z = -2 \\ 4x - y = 0{,}5 \end{cases}$$

2 ـ
$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = -1 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

الحــل ــ 21

1 ــ
$$\begin{cases} 4x+2y+z=4 \text{ .... (a)} \\ 4x-2y+z=-2 \text{ .... (b)} \\ 4x-y=0,5 \text{ .... (c)} \end{cases}$$

بجمع (a) و (b) نحصل على : $8x+2z=2$

منه : $8x=2-2z$

أي : $x=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}z$

بالتعويض في (c) نحصل على : $4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}z\right)-y=0,5$

أي : $1-z-0,5=y$

أي : $0,5-z=y$

نتيجة : حلول الجملة (1) هي مجموعة غير منتهية من الثلاثيات $(x\,;y\,;z)$ حيث
$$\begin{cases} x=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}z \\ y=0,5-z \\ z\in IR \end{cases}$$

التفسير الهندسي : إذا كانت (P) ، (Q) ، (R) ثلاث مستويات معادلاتها على الترتيب

$4x+2y+z-4=0$ ؛ $4x-2y+z+2=0$ ؛ $4x-y-0,5=0$

فإن المستويات (P) ، (Q) ، (R) تتقاطع في مستقيم تمثيله الوسيطي هو
$$\begin{cases} x=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t \\ y=0,5-t \\ z=t \end{cases} \quad \text{حيث } t\in IR$$

2 ــ
$$\begin{cases} 5x+3y+4z=-1 \text{ ...... (a)} \\ 2x+3y+z=-1 \text{ .... (b)} \\ x+y+z=1 \text{ .... (c)} \end{cases}$$

بطرح (b) من (a) نحصل على : $3x+3z=0$

منه : $x=-z$

بالتعويض في (c) نحصل على : $-z+y+z=1$

أي : $y=1$

نتيجة : حلول الجملة (2) هي مجموعة غير منتهية من الثلاثيات $(x\,;y\,;z)$ حيث
$$\begin{cases} x=-z \\ y=1 \\ z\in IR \end{cases}$$

التفسير الهندسي : المستويات التي معادلاتها $5x+3y+4z+1=0$ و $2x+3y+z+1=0$

و $x+y+z-1=0$ تتقاطع في مستقيم تمثيله الوسيطي هو :
$$\begin{cases} x=-t \\ y=1 \\ z=t \end{cases} \quad \text{حيث } t\in IR$$

التمرين ــ 22

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C المعادلة (E) .... $z^3-12z^2+48z-128=0$ ذات المجهول z

1 ــ تحقق أن 8 حل للمعادلة (E) ثم استنتج الحلين الآخرين .

2 ــ لتكن A ، B ، C نقط لواحقها على الترتيب $a=2-2i\sqrt{3}$ ؛ $b=2+2i\sqrt{3}$ ؛ $c=8$

a) أحسب طويلة و عمدة a

b) أحسب $q=\frac{a-c}{b-c}$ ثم عين طويلة و عمدة له .

c) ما هي طبيعة المثلث ABC

d) عين D مرجح الجملة $\{(A\,;|a|)\,;(B\,;|b|)\,;(C\,;|c|)\}$

e) عين المجموعة (T) من النقط M حيث $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|$

الحـل ــ 22

1 ــ من أجل $z = 8$:

$$(8)^3 - 12(8)^2 + 48(8) - 128 = 8(64 - 96 + 48 - 16) = 8(112 - 112) = 0$$

إذن : $z = 8$ هو حل لـ (E)

الحلول الأخرى :

$$\begin{array}{l|l} z^3 - 12z^2 + 48z - 128 & z - 8 \\ \hline z^3 - 8z^2 & z^2 - 4z + 16 \\ -4z^2 + 48z - 128 & \\ -4z^2 + 32z & \\ 16z - 128 & \\ 16z - 128 & \\ 0 & \end{array}$$

نتيجة : الحلول الأخرى للمعادلة (E) هي حلول المعادلة $z^2 - 4z + 16 = 0$ في C كما يلي :

$$\Delta = 16 - 4(16) = -3(16) = (4i\sqrt{3})^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{4 - 4i\sqrt{3}}{2} = 2 - 2i\sqrt{3} \\ z_2 = \dfrac{4 + 4i\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3} \end{cases}$$

نتيجة : حلول المعادلة (E) هي $\{8 ; 2 - 2i\sqrt{3} ; 2 + 2i\sqrt{3}\}$

2 ــ a) $a = 2 - 2i\sqrt{3}$ منه $|a| = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$

لتكن $\theta = \text{Arg}(a)$ إذن :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

منه : $\theta = \dfrac{-\pi}{3}$

b)

$$q = \frac{a - b}{b - c}$$

$$= \frac{2 - 2i\sqrt{3} - 2 - 2i\sqrt{3}}{2 + 2i\sqrt{3} - 8}$$

$$= \frac{-4i\sqrt{3}}{-6 + 2i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-2i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-2i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}} \times \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 - i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6i\sqrt{3} - 6}{9 + 3}$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

منه : $|q| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}} = 1$

لتكن $\alpha = Arg(q)$ إذن : $\begin{cases} \cos\alpha = -1/2 \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

منه : $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$

c) $AB^2 = |a - b|^2 = |2 - 2i\sqrt{3} - 2 - 2i\sqrt{3}|^2 = |-4i\sqrt{3}|^2 = 48$

$AC^2 = |a - c|^2 = |2 - 2i\sqrt{3} - 8|^2 = |-6 - 2i\sqrt{3}|^2 = 36 + 12 = 48$

$BC^2 = |b - c|^2 = |2 + 2i\sqrt{3} - 8|^2 = |-6 + 2i\sqrt{3}|^2 = 48$

منه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

d) $|a| = 4$

$|b| = |\bar{a}| = |a| = 4$

$|c| = |8| = 8$

منه : $z_d = \dfrac{4a + 4b + 8c}{8 + 4 + 4}$

$= \dfrac{8 - 8i\sqrt{3} + 8 + 8i\sqrt{3} + 64}{16}$

$= 5$

إذن : احداثيات النقطة D هي : $(5\ ;\ 0)$

2 ــ من أجل كل نقطة M من المستوي لدينا $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MD}$ لأن D هي مرجح الجملة $\{(A\ ;\ 4)\ ;\ (B\ ;\ 4)\ ;\ (C\ ;\ 8)\}$ و هي نفسها مرجح الجملة $\{(A\ ;\ 1)\ ;\ (B\ ;\ 1)\ ;\ (C\ ;\ 2)\}$
بضرب كل المعاملات في 1/2

من جهة أخرى الشعاع $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ مستقل عن النقطة M لأن مجموع المعاملات معدوم .

إذن : من أجل M تنطبق على C نحصل على : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

نتيجة : $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}\|$ يكافئ $\|4\overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\|$

يكافئ $\|\overrightarrow{MD}\| = \dfrac{1}{4}\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\|$

يكافئ $MD = \dfrac{1}{4}|a - c + b - c|$

يكافئ $MD = \dfrac{1}{4}|2 - 2i\sqrt{3} - 8 + 2 + 2i\sqrt{3} - 8|$

يكافئ $MD = \dfrac{1}{4}|-12|$

يكافئ $MD = 3$

نتيجة : (T) هي الدائرة التي مركزها $D(5\ ;\ 0)$ و نصف قطرها 3

التمرين ــ 23

لتكن (P_m) مجموعة نقط الفضاء ذات الاحداثيات $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ حيث
$(3 - m)x + 4y - (1 + 2m)z - 5 = 0$ مع m وسيط حقيقي .

1 ــ بين أن من أجل كل m من IR فإن (P_m) مستوي

2 ــ عين نقطة و شعاع توجيه المستقيم (D) تقاطع (P_0) و (P_1)

3 ــ بين أن (D) محتواة في كل المستويات (P_m)

الحـل ــ 23

1 ــ من أجل كل m من IR لدينا : $(3 - m\ ;\ 4\ ;\ 1 + 2m) \neq (0\ ;\ 0\ ;\ 0)$

إذن : من أجل كل $m \in IR$ فإن (P_m) هو مستوي .

2 ــ معادلة (P_0) : $3x + 4y - z - 5 = 0$ ....(1)

معادلة (P_1) : $2x + 4y - 3z - 5 = 0$ ..... .(2)

نطرح (2) من (1) نحصل على : $x + 2z = 0$

منه : $x = -2z$

نعوض x في (1) نحصل على : $3(-2z) + 4y - z - 5 = 0$

منه : $4y = 7z + 5$

أي : $y = \frac{7}{4}z + \frac{5}{4}$

نتيجة : (P_0) و (P_1) يتقاطعان في مستقيم (D) ذو التمثيل الوسيطي التالي :

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{7}{4}t + \frac{5}{4} \\ z = t \end{cases}$$ حيث $t \in IR$

منه : (D) يشمل النقطة $A(0 ; 5/4 ; 0)$ و $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 7/4 \\ 1 \end{pmatrix}$ شعاع توجيه له .

3 ـ لتكن $M(x ; y ; z)$ نقطة من المستقيم (D) إذن : يوجد $t \in IR$ حيث $\begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{7}{4}t + \frac{5}{4} \\ z = t \end{cases}$

منه : من أجل كل عدد حقيقي m فإن :

$$(3 - m)x + 4y - (1 + 2m)z - 5 = (3 - m)(-2t) + 4\left(\frac{7}{4}t + \frac{5}{4}\right) - (1 + 2m)t - 5$$
$$= -6t + 2mt + 7t + 5 - t - 2mt - 5$$
$$= 7t - 7t + 2mt - 2mt + 5 - 5$$
$$= 0$$

إذن : $M \in (P_m)$

نتيجة : كل نقطة من (D) هي نقطة من (P_m) إذن : $(D) \subset (P_m)$

التمرين ـ 24

لتكن النقط $A(3 ; -2 ; 2)$ ؛ $B(6 ; 1 ; 5)$ ؛ $C(6 ; -2 ; -1)$

1 ـ بين أن المثلث ABC قائم .

2 ـ ليكن (P) المستوي ذو المعادلة $x + y + z - 3 = 0$

بين أن (P) عمودي على المستقيم (AB) و يمر من النقطة A .

3 ـ ليكن (Q) المستوي العمودي على (AC) و الذي يشمل A . أكتب معادلة ديكارتية للمستوي (Q) .

4 ـ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (d) حيث (d) هو تقاطع المستويين (P) و (Q)

5 ـ لتكن D نقطة احداثياتها $(0 ; 4 ; -1)$

a) بين أن المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

b) أحسب حجم الرباعي الوجوه ABDC

الحـل ـ 24

1 ـ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6-3 \\ 1+2 \\ 5-2 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6-3 \\ -2+2 \\ -1-2 \end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

نتيجة : $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC} = 3(3) + 3(0) + 3(-3) = 9 - 9 = 0$

إذن : $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان .

منه : ABC مثلث قائم في A .

2 ـ (P) له المعادلة $x + y + z - 3 = 0$ إذن : $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي له .

من جهة أخرى $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ هو شعاع توجيه المستقيم (AB)

بما أن $3/1 = 3/1 = 3/1$ فإن $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{AB}$ متوازيان .
منه : المستقيم (AB) عمودي على المستوي (P)
هل $A \in (P)$ ؟ $3 - 2 + 2 - 3 = 0$
إذن : فعلا A تنتمي إلى (P)
نتيجة : (P) يشمل النقطة A و عمودي على المستقيم (AB)

3 ـ (Q) مستوي عمودي على (AC) إذن : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي له
منه : (Q) له المعادلة $3x - 3z + \alpha = 0$ حيث α ثابت حقيقي .
إذن : $A \in (Q)$: $3(3) - 3(2) + \alpha = 0$
أي : $\alpha = -3$
منه : معادلة المستوي (Q) هي : $3x - 3z - 3 = 0$
أي : $x - z - 1 = 0$

4 ـ $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \;.....\; (1) \\ x - z - 1 = 0 \;...........(2) \end{cases}$

بجمع (1) و (2) : $2x + y - 4 = 0$ أي $y = 4 - 2x$
من المعادلة (2) : $z = x - 1$
نتيجة : المستقيم (d) تقاطع المستويين (P) و (Q) له التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases} x = t \\ y = 4 - 2t \\ z = t - 1 \end{cases}$ حيث $t \in IR$

5 ـ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}0-3\\4+2\\-1-2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$

a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 3(-3) + 3(6) + 3(-3) = 0$
$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 3(-3) + 0(6) - 3(-3) = 0$
نتيجة : $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$
إذن : $\overrightarrow{AD}$ شعاع ناظمي للمستوي (ABC)
أي : المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC)

b) بما أن (AD) عمودي على المستوي (ABC) فإن [AD] هو ارتفاع رباعي الوجوه ABDC
منه : حجم الرباعي ABCD هو : $V = \frac{1}{3} AD \times S$ حيث S هي مساحة القاعدة الممثلة بالمثلث ABC
منه $S = \frac{1}{2} AB \times AC$ لأن ABC مثلث قائم في A

نتيجة : $V = \frac{1}{3} AD \times \frac{1}{2} AB \times AC$

أي $V = \frac{1}{6} AB \times AC \times AD$

أي : $V = \frac{1}{6} \sqrt{9+9+9} \times \sqrt{9+9} \times \sqrt{9+36+9}$

أي $V = \frac{1}{6} \times \sqrt{27} \times \sqrt{18} \times \sqrt{54}$

أي $V = \frac{1}{6} \times 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}$

أي $v = 27$ (مقدر بوحدة الحجوم)

التمرين ــ 25

لتكن النقط $A(4\,;0\,;-3)$ ، $B(2\,;2\,;2)$ ، $C(3\,;-3\,;-1)$ ، $D(0\,;0\,;-3)$
1 ــ عين معادلة ديكارتية للمستوي (P) المحوري للقطعة [AB]

2 ــ نقبل أن المستويين المحوريين للقطعتين [BD] و [DC] معرفان بالمعادلتين $2x-10y-6z-7=0$
و $3x-3y+2z-5=0$ على الترتيب
بين أن تقاطع هذه المستويات الثلاثة هو نقطة E يطلب احداثياتها
3 ــ بين أن النقط A ، B ، C ، D تقع على سطح كرة مركزها E و يطلب تعيين نصف قطرها .

الحــل ــ 25

1 ــ لتكن w منتصف [AB] إذن : $w\left(\frac{4+2}{2}\ ;\ \frac{0+2}{2}\ ;\ \frac{-3+2}{2}\right)$

أي $w(3\ ;\ 1\ ;\ -1/2)$

من جهة أخرى : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-4\\2-0\\2+3\end{pmatrix}$ إذن $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\5\end{pmatrix}$

منه المستوي (P) يشمل النقطة w و الشعاع $\overrightarrow{AB}$ ناظمي له إذن :

(P) له المعادلة $-2x+2y+5z+\alpha=0$ حيث α ثابت حقيقي

$w\in(P)$ إذن : $-2(3)+2(1)+5(-1/2)+\alpha=0$

منه : $\alpha=\frac{5}{2}+4=\frac{13}{2}$

نتيجة : (P) له المعادلة $-2x+2y+5z+\frac{13}{2}=0$

أي : $4x-4y-10z-13=0$

2 ــ إذا وجدت نقطة E مشتركة بين المستويات الثلاثة فإن احداثياتها $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ هي حل للجملة :

$$\begin{cases}4x-4y-10z-13=0\ ....\ (1)\\2x-10y-6z-7=0\ ....\ (2)\\3x-3y+2z-5=0\ ....\ (3)\end{cases}$$

نبحث عن x و y بدلالة z في المعادلتين (1) و (2) كما يلي :

$$\det=\begin{vmatrix}4 & -4\\2 & -10\end{vmatrix}=-40+8=-32$$

$$x=\frac{-1}{32}\begin{vmatrix}-4 & -10z-13\\-10 & -6z-7\end{vmatrix}=\frac{-1}{32}(24z+28-100z-130)=\frac{-1}{32}(-76z-102)$$

$$y=\frac{-1}{32}\begin{vmatrix}-10z-13 & 4\\-6z-7 & 2\end{vmatrix}=\frac{-1}{32}(-20z-26+24z+28)=\frac{-1}{32}(4z+2)$$

أي $\begin{cases}x=\frac{19}{8}z+\frac{51}{16}\\y=\frac{-1}{8}z-\frac{1}{16}\end{cases}$

بالتعويض في المعادلة (3) : $3\left(\frac{19}{8}z\right)+3\left(\frac{51}{16}\right)-3\left(\frac{-1}{8}z\right)-3\left(\frac{-1}{16}\right)+2z-5=0$

أي : $\left(\frac{57}{8}+\frac{3}{8}+2\right)z+\frac{153}{16}+\frac{3}{16}-5=0$

أي : $\frac{57+3+16}{8}z=\frac{80-3-153}{16}$

أي : $z=\frac{-76}{16}\times\frac{8}{76}$

أي : $z=-1/2$

بالتعويض في عبارتي x و y نحصل على : $\begin{cases}x=\frac{19}{8}\left(\frac{-1}{2}\right)+\frac{51}{16}=\frac{32}{16}=2\\y=\frac{-1}{8}\left(\frac{-1}{2}\right)-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=0\end{cases}$

نتيجة : المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة وحيدة $E(2 ; 0 ; -1/2)$

3 — $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}2-4\\0-0\\-\frac{1}{2}+3\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}-2\\0\\5/2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}2-2\\0-2\\-\frac{1}{2}-2\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}0\\-2\\-5/2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}2-3\\0+3\\-\frac{1}{2}+1\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-1\\3\\1/2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2-0\\0-0\\-\frac{1}{2}+3\end{pmatrix}$ منه $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}2\\0\\5/2\end{pmatrix}$

نتيجة :

$$AE=\sqrt{4+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{16+25}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$BE=\sqrt{4+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$CE=\sqrt{1+9+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{4+36+1}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$DE=\sqrt{4+\frac{25}{4}}=\frac{\sqrt{41}}{2}$$

منه : $AE=BE=CE=DE=\frac{\sqrt{41}}{2}$

إذن : النقط A ، B ، C ، D تنتمي إلى سطح الكرة التي مركزها $E(2 ; 0 ; -1/2)$ و نصف قطرها $\frac{\sqrt{41}}{2}$

التمرين — 26

$S(1 ; -2 ; 0)$ نقطة من الفضاء و (P) المستوي ذوالمعادلة : $x+y-3z+4=0$.

اختر الجواب الصحيح في كل سؤال من الأسئلة التالية :

1 — التمثيل الوسيطي للمستقيم (D) الذي يشمل S و يعامد (P) هو :

a) $\begin{cases}x=1+t\\y=1-2t\\z=-3\end{cases}$ b) $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=1-3t\end{cases}$

c) $\begin{cases}x=1+t\\y=-2-2t\\z=3t\end{cases}$ d) $\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=-3-3t\end{cases}$

2 — H هي نقطة تقاطع (P) و (D) . هل احداثيات H هي :

a) $(-4 ; 0 ; 0)$ b) $(6/5 ; -9/5 ; -3/5)$

c) $(7/9 ; -2/3 ; 1/3)$ d) $(8/11 ; -25/11 ; 9/11)$

3 — بعد النقطة S عن المستوي (P) هو :

a) $\frac{\sqrt{11}}{3}$ b) $\frac{3}{\sqrt{11}}$ c) $\frac{9}{\sqrt{11}}$ d) $\frac{9}{11}$

4 — ليكن (s) سطح الكرة التي مركزها S و نصف قطرها 3

هل تقاطع السطح (s) مع المستوي (P) هو :

a) النقطة $A(1 ; -5 ; 0)$

b) الدائرة ذات المركز H و نصف القطر $3\sqrt{\frac{10}{11}}$

c) الدائرة ذات المركز S و نصف القطر 2

d) الدائرة ذات المركز H و نصف القطر $\frac{3\sqrt{10}}{11}$

الحـل – 26

1 – $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ هو شعاع ناظمي للمستوي (P) إذن : هو شعاع توجيه المستقيم (D)

منه : (D) له التمثيل الوسيطي التالي : $\begin{cases}x-1=k\\y+2=k\\z-0=-3k\end{cases}$ حيث $k\in IR$

أي : $\begin{cases}x=1+k\\y=-2+k\\z=-3k\end{cases}$

نضع $k=t+1$ منه : $\begin{cases}k+1=t+2\\k-2=t-1\\-3k=-3-3t\end{cases}$ حيث $t\in IR$

نتيجة : $\begin{cases}x=t+2\\y=t-1\\z=-3-3t\end{cases}$

إذن : الجواب الصحيح هو $d)\begin{cases}x=2+t\\y=-1+t\\z=-3-3t\end{cases}$

2 – لتكن H نقطة تقاطع (P) و (D)

إذن : $2+t-1+t-3(-3-3t)+4=0$

أي $1+2t+9+9t+4=0$

أي $11t=-14$

أي $t=-14/11$

منه : $\begin{cases}x=2-\frac{14}{11}=\frac{8}{11}\\y=-1-\frac{14}{11}=\frac{-25}{11}\\z=-3+\frac{42}{11}=\frac{9}{11}\end{cases}$

نتيجة : الجواب الصحيح هو (8/11 ; -25/11 ; 9/11) (d

3 – لتكن ℓ مسافة النقطة S عن المستوي (P)

$$\ell=\frac{|1-2-3(0)+4|}{\sqrt{1+1+9}}=\frac{3}{\sqrt{11}}$$

نتيجة : الجواب الصحيح هو $b)\ \frac{3}{\sqrt{11}}$

4 – بتعويض احداثيات A في معادلة المستوي (P) نحصل على :

$1-5+4=-4+4=0$ إذن : $A\in(P)$

من جهة أخرى : $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}1-1\\-2+5\\0-0\end{pmatrix}$ أي $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}$ منه : $AS=\sqrt{0+9+0}=3$ إذن : $A\in(s)$

نتيجة : $A\in(s)\cap(P)$ منه الجواب الصحيح هو a) النقطة $A(1\,;-5\,;0)$

الفهرس

TEL : 0773 26 52 81